Алгоритмы вычислений

Статистические методы обработки экспериментальных данных (АПК)

Приведены алгоритмы вычисления статистических параметров.

Источник:

Н.А. Плохинский.

Биометрия. МГУ, 1970

ФГОУ ВПО НГАУ

Алгоритмы вычислений

Новосибирский ГАУ

Биолого-технологический институт

Кафедра ветеринарной генетики и биотехнологии

Сборка и компиляция в PDF

д. с.-х. н., профессор

В.Н. Дементьев

Методическое пособие к одноименной дисциплине.

Для студентов 3 курса, специализирующихся по технологии производства с.-х. продукции

Алгоритм 1

Вычисление M и σ без составления вариационных рядов; при отсутствии достаточной счетной техники для малых групп

Даты малозначные	Даты многозначные
Каждая дата возводится в квадрат; даты и их квадраты суммируются; на основе полученных сумм ΣV и ΣV^2 рассчитываются: средняя арифметическая $M = \frac{\Sigma V}{n}$, дисперсия (сумма квадратов) $C = \Sigma V^2 - \frac{(\Sigma V)^2}{n}$, сигма $\sigma = \sqrt{\frac{C}{n-1}}$	По каждой дате получается условное отклонение $\Delta = V - A$, где A любое удобное число; каждое отклонение возводится в квадрат; на основе двух сумм $\Sigma\Delta$ и $\Sigma\Delta^2$ рассчитываются: средняя арифметическая $M = A + \frac{\Sigma\Delta}{n}$, дисперсия (сумма квадратов) $C = \Sigma\Delta^2 - \frac{(\Sigma\Delta)^2}{n}$, сигма $\sigma = \sqrt{\frac{C}{n-1}}$

	V	V^2		V	$\Delta = (V - 2400)$	Δ^2
1	12	144	1	2536	136	18 496
2	9	81	2	2703	303	91 809
3	10	100	3	2815	415	172 225
4	13	169	4	2487	87	7 569
5	15	225	5	2644	244	59 536
6	14	196	6	2521	121	14 641
7	8	64	7	2452	52	2 704
8	12	144	8	2463	63	3 969
	$\Sigma V = 93$	$\Sigma V^2 = 1123$		—	$\Sigma\Delta = 1421$	$\Sigma\Delta^2 = 370\,949$

$M = \frac{93}{8} = 11{,}6$	$M = 2400 + \frac{1421}{8} = 2577{,}6$
$C = 1123 - \frac{93^2}{8} = 41{,}88$	$C = 370\,949 - \frac{(1421)^2}{8} = 118\,544$
$\sigma = \sqrt{\frac{41{,}88}{7}} = 2{,}44$	$\sigma = \sqrt{\frac{118\,544}{7}} = 130{,}13$

Алгоритм 2

Вычисление M и σ без составления вариационных рядов, при наличии достаточной счетной техники (арифмометры с полным учетом числа оборотов, электрические полные автоматы типа CAP, Мерседес)

для больших и малых групп

Все даты последовательно возводятся в квадрат, без снятия получающихся чисел (в счетчике оборотов) и их квадратов (в счетчике результатов). Каждое последующее возведение в квадрат накладывается на все предыдущие После возведения в квадрат последней даты получаются две основные суммы ΣV и ΣV^2 При большом числе дат они разбиваются на десятки (пятерки) и для каждого десятка (пятерки) получаются частные суммы ΣV и ΣV^2 Затем частные суммы складываются На основе двух общих сумм ΣV и ΣV^2 рассчитываются M и σ

	413	450	419	412	427	435	404	430	421	399	$M=\frac{\Sigma V}{n}$
	414	386	428	441	397	417	418	414	429	417	
	432	420	416	407	427	428	417	398	424	420	$C=\Sigma V^2-\frac{(\Sigma V)^2}{n}$
	401	424	411	426	380	419	406	419	429	406	
	414	410	409	416	430	403	426	407	400	423	$\sigma=\sqrt{\frac{C}{n-1}}$
	425	391	432	409	418	418	388	421	415	417	$n=100$
	423	434	402	431	410	405	436	405	424	405	
	412	413	444	392	411	428	394	431	411	422	
	433	395	433	420	439	398	437	422	394	416	
	424	434	408	443	407	421	422	410	423	409	
ΣV	4191	4157	4202	4197	4146	4172	4148	4157	4170	4134	$\Sigma V=41\,674$
ΣV^2	1 757 349	1 731 959	1 767 320	1 763 761	1 721 682	1 741 846	1 723 070	1 729 121	1 740 186	1 709 590	$\Sigma V^2=17\,385\,884$

Средняя арифметическая $M=\frac{41\,674}{100}=416{,}7$

Дисперсия (сумма квадратов) $C=17\,385\,884-\frac{41\,674^2}{100}=18\,661$

Сигма $\sigma=\sqrt{\frac{18\,661}{99}}=13{,}73$

Алгоритм 3

Вычисление M и σ по способу взвешенных дат при невозможности простого суммирования дат и их квадратов; при необходимости исследовать распределение признака; для признаков, выражаемых только целыми числами (плодовитость, число плодов, початков, клеток и т. д.), при небольшом размахе дат

Все неповторяющиеся значения дат выписываются в возрастающем порядке (слева направо или снизу вверх) и в каждый класс заносятся одинаковые даты, имеющие данное значение.

Без достаточной счетной техники				При наличии достаточной счетной техники		
V	f	fV	$fV^2=fV\cdot V$	V	V^2	f
14	11	154	2 156	14	196	11
13	69	897	11 661	13	169	69
12	98	1176	14 112	12	144	98
11	77	847	9 317	11	121	77
10	36	360	3 600	10	100	36
9	12	108	972	9	81	12
	$n=303$	$\Sigma fV=3542$	$\Sigma fV^2=41\,818$	$\Sigma fV=3542$	$\Sigma fV^2=41\,818$	$n=303$

$$M=\frac{\Sigma fV}{n}=\frac{3542}{303}=11{,}7 \qquad C=\Sigma fV^2-\frac{(\Sigma fV)^2}{n}=41\,818-\frac{3542^2}{303}=413$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{C}{n-1}}=\sqrt{\frac{413}{302}}=1{,}17$$

При наличии хорошего арифмометра или полного счетного автомата получение двух исходных сумм делается за один проход. Даты устанавливаются в левой части клавиатуры (штифтов), а квадраты дат — в правой. Каждая пара чисел (V и V^2) умножается на частоту последовательно без записи и снятия промежуточных результатов. После последнего умножения получаются: в счетчике оборотов — число дат (n), в счетчике результатов слева — ΣfV и справа — ΣfV^2.

Алгоритм 4

Составление вариационного ряда. Первичные данные (даты)

413	450	419	412	427	435	404	430	421	399	414	386	428	441	397	417	418	414	429	417
423	420	416	407	427	428	417	398	424	420	401	424	411	426	380	419	406	419	429	406
414	410	409	416	430	403	426	407	400	423	425	391	432	409	418	418	388	421	415	417
423	434	402	431	410	405	436	405	424	405	412	413	444	392	411	428	394	431	411	422
433	395	433	420	439	398	437	422	394	416	424	434	408	443	407	421	422	410	423	409

Число классов

$$r = 1 + 3{,}3 \lg n = 1 + 3{,}3 \lg 100 = 7{,}6$$

Число дат	Число классов
6—11	4
12—22	5
23—46	6
47—93	7
94—187	8
188—377	9
378—755	10
756—1515	11
1515—3050	12

Размах

$$\rho = \max - \min = 450 - 380 = 70$$

Величина классов

$$k = \frac{\rho}{r} = \frac{70}{7{,}6} = 9{,}2 \approx 10$$

Вариационный ряд

Классы: границы $W_\alpha \div W_\omega$	Классы: средины W	Разноска	Частоты f
$445 \div 454$	450	·	1
$435 \div 444$	440	⊓	7
$425 \div 434$	430	⊠ ⊠	20
$415 \div 424$	420	⊠ ⊠ ⊠	30
$405 \div 414$	410	⊠ ⊠ ⁙	25
$395 \div 404$	400	⊠	10
$385 \div 394$	390	Γ	6
$375 \div 384$	380	·	1
—	—	—	$n = 100$

Средина классов W — полусумма начала данного класса и начала следующего бо́льшего класса. Для признаков, выражаемых только целыми числами (плодовитость, яйценоскость, число плодов, початков, клеток и т. д.), а также для дат, которые перед разноской округляются в обе стороны (3,63 → 3,6; 3,67 → 3,7), средина класса равна полусумме его начала и конца. Желательно, чтобы средины классов были кратны величине классов и чтобы средины минимального и максимального классов были близки к фактическим минимуму и максимуму

Начало классов $W_\alpha = W - \frac{1}{2}k$

Например: $W_\alpha = 420 - \frac{1}{2}\,10 = 415$

Конец классов $W_\omega = W + \frac{1}{2}k - \delta$, где δ — принятая точность измерения признака.

Например $W_\omega = 420 + \frac{1}{2}\cdot 10 - 1 = 424$

Шифр частот	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	·	··	∴	∷	⁙	Γ	⊓	□	◪	⊠

Алгоритм 5

Вычисление M и σ по способу взвешенных вариаций; для больших групп при невозможности простого суммирования дат и их квадратов и при необходимости исследовать распределение признака; на основе вариационного ряда при наличии достаточной счетной техники (арифмометры с полной регистрацией числа оборотов, электрические полные автоматы)

Вариации W	W^2	Частоты f
450	202 500	1
440	193 600	7
430	184 900	20
420	176 400	30
410	168 100	25
400	160 000	10
390	152 100	6
380	144 400	1
$\Sigma fW = 41\,700$	$\Sigma fW^2 = 17\,407\,200$	$n = 100$

$$M = \frac{\Sigma fW}{n} = \frac{41\,700}{100} = 417{,}0$$

$$C = \Sigma fW^2 - \frac{(\Sigma fW)^2}{n} = 17\,407\,200 - \frac{41\,700^2}{100} = 18\,300$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{C}{n-1}} = \sqrt{\frac{18\,300}{99}} = 13{,}60$$

Вариации W устанавливаются в левой части клавиатуры (штифтов), а квадраты вариаций W^2 — в правой. Каждая пара чисел (W и W^2) умножается на частоту последовательно, без записи и снятия промежуточных результатов. После последнего умножения получаются: в счетчике оборотов — число дат (n), в счетчике результатов слева — ΣfW и справа — ΣfW^2

Алгоритм 6

Вычисление M и σ
по способу произведений
для больших групп, при невозможности простого суммирования дат и их квадратов; при необходимости исследовать распределение признака;
на основе вариационного ряда;
при любой счетной технике

$$M = A + k\frac{S_1}{n};\quad c = S_2 - \frac{S_1^2}{n};\quad \sigma = k\sqrt{\frac{c}{n-1}};\quad S_1 = \Sigma fa;\quad S_2 = \Sigma fa^2$$

W	f	a	fa	$fa^2 = fa \cdot a$	
450	1	+3	+3	9	$n = 100;\ A = 420;\ k = 10$
440	7	+2	+14	28	$S_1 = \Sigma fa = -30;\ S_2 = \Sigma fa^2 = 192$
430	20	+1	+20 +37	20	
420 = A	30	0	0	0	$M = 420 + 10\frac{-30}{100} = 417{,}0$
410	25	−1	−25	25	
400	10	−2	−20	40	$c = 192 - \frac{30^2}{100} = 183;$
390	6	−3	−18	54	
380	1	−4	−4 −67	16	$C = 10^2 \cdot 183 = 18\,300$
	$n = 100$		$S_1 = \Sigma fa$ +37 −67 = −30	$S_2 = \Sigma fa^2$ = 192	$\sigma = 10\sqrt{\frac{183}{99}} = 13{,}60$

A — условная средняя: средина модального или близкого к нему класса ($A = 420$)

k — величина классового промежутка ($k = 10$)

$a = \frac{W_i - A}{k}$ — условные отклонения средин классов (вариаций), выраженные в классовых промежутках. Для $W = A$, $a = 0$, для остальных вариаций $a =$ или $+1\ +2\ +3$ и т. д. или $-1\ -2\ -3$ и т. д.

S_1, S_2 — первая и вторая суммы, равные Σfa и Σfa^2 (— 30, 192)

$c = \frac{C}{k^2} = \frac{1}{k^2}\Sigma f(W_i - M)^2 = S_2 - \frac{S_1^2}{n}$ — сумма взвешенных квадратов центральных отклонений средин классов от средней ряда, выраженных в квадратах классового промежутка. Дисперсия: $C = k^2c$

Погрешности при расчете показателей на основе вариационного ряда для данного примера равны: $\Delta_M = 417{,}0 - 416{,}7 = +0{,}3$; $\Delta_\sigma = 13{,}60 - 13{,}73 = -0{,}13$

Алгоритм 7

Вычисление M и σ по способу сумм для больших групп, при невозможности простого суммирования дат и их квадратов; при необходимости исследовать распределение признака; на основе вариационного ряда; при любой счетной технике

$$M = A + k\frac{S_1}{n};\quad c = S_2 - \frac{S_1^2}{n};\quad \sigma = k\sqrt{\frac{c}{n-1}};\quad S_1 = p_1 - q_1 = [\Sigma fa]\quad S_2 = p_1 + q_1 + 2(p_2 + q_2) = [\Sigma fa^2]$$

V	f	$p_1=37$	$p_2=10$	Проверка: $28+30+42=100$; $28+9=37$; $42+25=67$
450	1	1	1	$n=100$; $A=420$; $k=10$
440	7	8	9	
430	20	28	—	$S_1 = 37 - 67 = -30$; $S_2 = 37 + 67 + 2(10+34) = 192$
$420 = A$	30	—	—	
410	25	42	—	$M = 420 + 10\frac{-30}{100} = 417{,}0$
400	10	17	25	
390	6	7	8	$c = 192 - \frac{30^2}{100} = 183$; $C = 100 \cdot 183 = 18300$
380	1	1	1	
	$n=100$	$q_1=67$	$q_2=34$	$\sigma = 10\sqrt{\frac{183}{99}} = 13{,}60$

p_1 — сумма накопленных частот положительной части первого ряда суммирования (37)
q_1 — сумма накопленных частот отрицательной части первого ряда суммирования (67)
p_2, q_2 — то же для второго ряда суммирования (10 и 34)

Центральные черточки (в первом ряду — одна, во втором — три) устанавливаются точно против условной средней (A); накопление частот ведется от краев к центру до встречи с центральными черточками

Числа первого ряда: для положительной части 1; $1+7=8$; $8+20=28$; $p_1 = 1+8+28=37$; для отрицательной части 1; $1+6=7$; $7+10=17$; $17+25=42$; $q_1 = 1+7+17+42=67$. Числа второго ряда: для положительной части 1; $1+8=9$; $p_2 = 1+9=10$; для отрицательной части 1; $1+7=8$; $8+17=25$; $q_2 = 1+8+25=34$. По полученным p_1, q_1, p_2, q_2 вычисляются две суммы S_1 и S_2

Содержание и назначение остальных величин n, A, k, S_1, S_2, c такие же, как и для способа произведений. Различие способов — только в вычислении двух основных сумм S_1 и S_2, которые по своей конечной величине равны Σfa и Σfa^2

Способ сумм — самый удобный и экономный способ расчета M и σ для больших групп, при необходимости исследовать распределение признака, при любой счетной технике

Алгоритм 8

Выравнивание эмпирических вариационных кривых по нормальному закону

$$p' = \frac{n \cdot k}{\sigma} \cdot f(x)$$

p' — теоретическая частота;
n — объем ряда;
k — классовый промежуток;
σ — сигма;

$f(x)$ — первая функция нормированного отклонения, находится по таблицам ординат нормальной кривой (табл. VI)

$x = \frac{W - M}{\sigma}$ — нормированное отклонение средин классов

Вариации W	Эмпирические частоты p	$W - M$	$x = \frac{W-M}{\sigma}$	$f(x)$	Теоретические частоты	
					$\frac{n \cdot k}{\sigma} \cdot f(x)$	p'
450	1	+33	2,43	0,021	1,5	1
440	7	+23	1,69	0,096	7,1	7
430	20	+13	0,96	0,252	18,5	18
420	30	+3	0,22	0,389	28,6	29
410	25	—7	0,51	0,350	25,7	26
400	10	—17	1,25	0,183	13,5	14
390	6	—27	1,99	0,055	4,0	4
380	1	—37	2,72	0,010	0,7	1
	100	—	—	—	99,6	100

Пример:

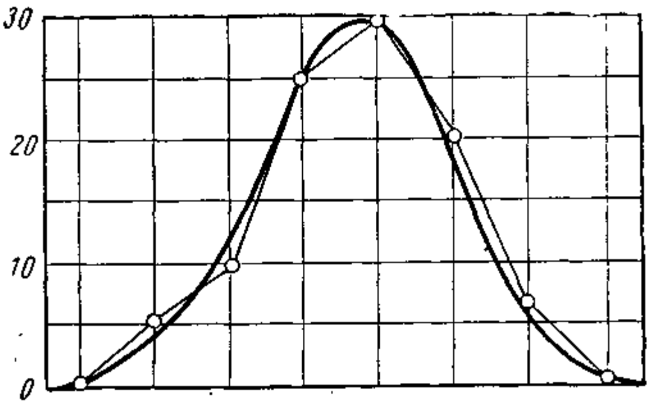
$n = 100$

$k = 10$

$M = 417,0$

$\sigma = 13,6$

$$\frac{n \cdot k}{\sigma} = \frac{100 \cdot 10}{13,6} = 73,53$$



Вариации	380	390	400	410	420	430	440	450
Эмпирические частоты p	1	6	10	25	30	20	7	1
Теоретические частоты p'	1	4	14	26	29	18	7	1

Алгоритм 9

Оценка различий между эмпирическим распределением и теоретическим Критерий χ^2 («хи квадрат»)

$$\chi^2 = \sum \frac{(f-f')^2}{f'} \geqslant \chi^2_{st} \begin{cases} \beta_3 \geqslant 0{,}999 \text{ — при малой} \\ \beta_2 \geqslant 0{,}99 \text{ — при обычной} \\ \beta_1 \geqslant 0{,}95 \text{ — при большой} \end{cases} \text{ответственности исследований}$$

$\nu_2 = r_2 - 3$ — число степеней свободы

Различия могут считаться случайными, если эмпирический критерий не достигает требуемого порога вероятности

f, f' — эмпирические и теоретические частоты классов

χ^2_{st} — стандартные значения критерия (табл. XI)

ν_1, ν_2 — первичное и вторичное число степеней свободы $\nu_1 = r_1 - 3$, $\nu_2 = r_2 - 3$

r_1, r_2 — число классов в распределении до и после редукции классов с малыми теоретическими частотами

f'_{min} — минимально допустимая теоретическая частота крайних классов в зависимости от начального числа степеней свободы

ν_1	1	2	3÷6	>6
f'_{min}	4	2	1	0,5

Крайние классы с теоретической частотой $f' < f'_{min}$ объединяются с соседними классами

W	f	f' алгоритм 8	$f-f'$	$(f-f')^2$	$\frac{(f-f')^2}{f'}$
450	1	1,5	0,5	0,25	0,167
440	7	7,1	0,1	0,01	0,001
430	20	18,5	1,5	2,25	0,122
420	30	28,6	1,4	1,96	0,069
410	25	25,7	0,7	0,49	0,019
400	10	13,5	3,5	12,25	0,907
390 / 380	6 / 1 } 7	4,0 / 0,7 } 4,7	2,3	5,29	1,126
Σ	100	99,6	—	—	2,411

$r_1 = 8;\ \nu_1 = 8 - 3 = 5;$

$f'_{min} = 1$

$r_2 = 7;\ \nu_2 = 7 - 3 = 4$

$\chi^2_{st} = \{9{,}5 - 13{,}3 - 18{,}5\}$

$\chi^2 = \underset{\sim}{2{,}41} < 9{,}5$

Различия не достоверны.

Эмпирическое распределение можно считать нормальным, точнее случайной формой проявления закономерностей нормального распределения (если теоретическое распределение строилось по нормальному закону)

Оценка различий любых распределений. Критерий λ («лямбда») А. Н. Колмогорова и Н. В. Смирнова

I. Оценка различий между теоретическими и эмпирическими распределениями

$$\lambda = \frac{|d|}{\sqrt{n}} = \frac{|\Sigma fi - \Sigma fi'|\max}{\sqrt{n}} \geqslant \begin{matrix} 1,95 & \beta_3 = 0,999 \text{ при малой (!)} \\ 1,63 & \beta_2 = 0,99 \text{ при обычной} \\ 1,36 & \beta_1 = 0,95 \text{ при большой (!)} \end{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} \begin{matrix} \text{ответственности} \\ \text{результатов} \\ \text{исследований} \end{matrix}$$

Различия могут считаться случайными, если эмпирический критерий не достигает требуемого порога вероятности.

W	f	f'	Накопленные частоты Σf	Накопленные частоты $\Sigma f'$	$\|d\|$
450	1	1	100	100	0
440	7	7	99	99	0
430	20	18	92	92	0
420	30	29	72	74	2
410	25	26	42	45	$\boxed{3}$
400	10	14	17	19	2
390	6	4	7	5	2
380	1	1	1	1	0
Σ	100	100	—	—	—

$n = 100$ — объем каждой группы

$$\lambda = \frac{3}{\sqrt{100}} = 0,3 < 1,36$$

Различие не достоверно, нет достаточных оснований считать, что выборки взяты из генеральных совокупностей, отличающихся своим распределением

II. Оценка различий между двумя любыми распределениями

$$\lambda = \left|\frac{\Sigma f_1}{n_1} - \frac{\Sigma f_2}{n_2}\right|_{\max} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \geqslant \left\{\begin{matrix} 1,95 & \beta_3 = 0,999 \text{ при малой (!)} \\ 1,63 & \beta_2 = 0,99 \text{ при обычной} \\ 1,36 & \beta_1 = 0,95 \text{ при большой (!)} \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \text{ответст.} \\ \text{результ.} \\ \text{исследов.} \end{matrix}$$

Различия могут считаться случайными, если эмпирический критерий не достигает требуемого порога вероятности.

W	f_1	f_2	Σf_1	Σf_2	$\frac{\Sigma f_1}{n_1}$	$\frac{\Sigma f_2}{n_2}$	$\|d\|$
450	1	2	100	200	1,00	1,00	0
440	7	4	99	198	0,99	0,99	0,00
430	20	8	92	194	0,92	0,97	0,05
420	30	42	72	186	0 72	0,93	0,21
410	25	83	42	144	0,42	0,72	$\boxed{0,30}$
400	10	37	17	61	0,17	0,31	0,14
390	6	20	7	24	0,07	0,12	0,05
380	1	4	1	4	0,01	0,04	0,03
n	100	200	—	—	—	—	

$$\lambda = 0,30 \cdot \sqrt{\frac{100 \cdot 200}{100 + 200}} = $$

$$= \underline{\underline{2,45}} > 1,95$$

Различия не могут считаться случайными, они в высшей степени достоверны. Выборки взяты из генеральных совокупностей, явно различающихся по своим распределениям.

Алгоритм II

Оценка разности выборочных средних

I. Первый критерий достоверности разности средних

$$t_d = \frac{d}{m_d} = \frac{M_1 - M_2}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}} \geqslant t_{st} \{\nu = n_1 + n_2 - 2\},$$

M_1, M_2 — сравниваемые выборочные средние
m_1^2, m_2^2 — квадраты ошибок средних

$$m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \quad m^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{C}{n(n-1)}$$

t_{st} — стандартные значения первого критерия находят по таблицам Стьюдента (табл. X) по числу степеней свободы ($\nu = n_1 + n_2 - 2$) для одного из трех порогов вероятности
n_1, n_2 — объемы выборок

II. Второй критерий достоверности разности средних

$$F_d = \frac{d^2}{\sigma_z^2} \cdot \frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2} \geqslant F_{st} \left\{ \begin{array}{l} \nu_1 = 1 \\ \nu_2 = n_1 + n_2 - 2 \end{array} \right\}$$

d^2 — квадрат разности средних: $(M_1 - M_2)^2$

$$\sigma_z^2 = \frac{(n_1 - 1)\sigma_1^2 + (n_2 - 1)\sigma_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{C_1 + C_2}{n_1 + n_2 - 2}$$ варианса случайного разнообразия

F_{st} — стандартные значения второго критерия находят по таблицам преобразованного фишеровского критерия (табл. IX) стандартных отношений варианс, для 3 порогов вероятности

При $t_d \geqslant t_{st}$ или при $F_d \geqslant F_{st}$ разность достоверна, подчеркивается одной, двумя или тремя чертами, если достигнут первый, второй или третий порог вероятности безошибочных прогнозов.

При $t_d < t_{st}$ или $F_d < F_{st}$ разность не достоверна, подчеркивается волнистой чертой

Если $\widetilde{M}_1 > \widetilde{M}_2$ и $t_d \geqslant t_{st}$ или $F_d \geqslant F_{st}$, то и $\overline{M}_1 > \overline{M}_2$ | $\widetilde{M}$ и $\overline{M}$ — выборочная
Если $\widetilde{M}_1 > \widetilde{M}_2$, а $t_d < t_{st}$ или $F_d < F_{st}$, то $\overline{M}_1 \gtreqless \overline{M}_2$ | и генеральная средние

Исходные данные: $n_1 = 25$, $n_2 = 36$, $M_1 = 230$, $M_2 = 210$, $\sigma_1 = 23$, $\sigma_2 = 21$.
Вычисление первого критерия достоверности разности средних:

$$m_1^2 = \frac{23^2}{25} = 21,16; \quad m_2^2 = \frac{21^2}{36} = 12,25; \quad m_d = \sqrt{21,16 + 12,25} = 5,78;$$

$$d = 230 - 210 = 20$$

$$t_d = \frac{20}{5,78} = \underline{\underline{\underline{3,46}}}; \quad \nu = 25 + 36 - 2 = 59; \quad t_{st} = \{2,0 - 2,7 - 3,5\} \text{ (табл. X)}.$$

Вычисление второго критерия достоверности разности средних:

$$\sigma_z^2 = \frac{24 \cdot 23^2 + 35 \cdot 21^2}{25 + 36 - 2} = 476,8$$

$$F_d = \frac{20^2}{476,8} \cdot \frac{25 \cdot 36}{25 + 36} = \underline{\underline{\underline{12,4}}}; \quad \begin{array}{l} \nu_1 = 1 \\ \nu_2 = 25 + 36 - 2 = 59; \; F_{st} = \{4,0 - 7,1 - 12,0\} \\ \text{(табл. IX)} \end{array}$$

Алгоритм 12

Оценка разности выборочных долей

I. Первый критерий достоверности разности для долей $0,2<p<0,8$; $20\%<p\%<80\%$

$$t_d=\frac{d}{m_d}=\frac{p_1-p_2}{\sqrt{m_1^2+m_2^2}}\geqslant t_{st}\{\nu_d=n_1+n_2-2\}$$

p_1, p_2 — сравниваемые доли $p=\frac{A}{n}$ $\begin{cases} n \text{ — объем группы} \\ A \text{ — число объектов с признаком} \end{cases}$

m_1^2, m_2^2 — квадраты ошибок долей $m=\sqrt{\frac{p\cdot q}{n-1}}$; $m^2=\frac{p\cdot q}{n-1}$; $q=1-p$

t_{st} — стандартные значения критерия Стьюдента (табл. X) для числа степеней свободы ν_d и трех порогов вероятности

Пример: $n_1=100$, $A_1=40$; $n_2=200$, $A_2=100$; $p_1=\frac{40}{100}=0,4$, $p_2=\frac{100}{200}=0,5$; $d=0,5-0,4=0,1$; $m_1^2=\frac{0,4\cdot 0,6}{99}=0,00242$; $m_2^2=\frac{0,5\cdot 0,5}{199}=0,00126$; $m_d^2=0,0037$; $m_d=0,061$; $t_d=\frac{0,1}{0,061}=\underset{\sim}{1,6}$, $\nu=100+200-2=298$, $t_{st}=\{2,0-2,6-3,3\}$

Вывод. Разность не достоверна. Осталось неизвестным, различаются ли генеральные совокупности по своим долям и какая из них может иметь бо́льшую долю.

II. Второй критерий достоверности разности долей. Метод φ («фи») Фишера для долей $0,2>p>0,8$; $20\%>p\%>80\%$, а также и для любых долей.

$$F_\varphi=(\varphi_1-\varphi_2)^2\cdot\frac{n_1\cdot n_2}{n_1+n_2}\geqslant F_{st}\begin{Bmatrix}\nu_1=1\\ \nu_2=n_1+n_2-2\end{Bmatrix}$$

φ_1, φ_2 — углы «фи» в радианах находят по табл. XIII

F_{st} — стандартные значения критерия Фишера (табл. IX)

Пример: $n_1=5000$, $A_1=4$; $n_2=500$, $A_2=4$; $p_1=\frac{4}{5000}=0,0008$, $p_2=\frac{4}{500}=0,0080$; $\varphi_1=0,0566$, $\varphi_2=0,1791$, $d_\varphi=0,1225$, $d_\varphi^2=0,015$

$$F_\varphi=0,015\,\frac{5000\cdot 500}{5000+500}=\underline{\underline{6,8}}\quad \begin{matrix}\nu_1=1\\ \nu_2=\infty,\end{matrix}\quad F_{st}=\{3,8-6,6-10,8\}$$

Вывод. Разность достоверна по второму порогу вероятности безошибочных прогнозов. С вероятностью $\beta>0,99$ можно считать, что содержание объектов с признаком в сравниваемых генеральных совокупностях неодинаково, причем эта доля в первой генеральной совокупности меньше, чем во второй

Первый критерий для данного случая дает неправильные показания:

$$t_d=(0,0080-0,0008):\sqrt{\frac{0,0008\cdot 0,9992}{4999}+\frac{0,008\cdot 0,992}{499}}=\underset{\sim}{1,8}$$

Алгоритм 13

Оценка разности между выборочной и генеральной долями

1. Проверка гипотезы о принадлежности изучаемой выборки (p) к определенной известной генеральной совокупности (P).
2. Проверка гипотезы о величине генеральной доли (P) по результатам проверочного выборочного исследования (p)

$$t_{(p-P)} = \frac{d}{m_d} \geqslant t_{st} \quad (\nu = n - 1)$$

p, P — выборочная и генеральная доли

$d = p - P$ — разность между выборочной и генеральной долями

$m_d = m_p = \sqrt{\frac{PQ}{n}}$ — ошибка разности между выборочной и генеральной долями, равная ошибке выборочной доли, определяемой на основе известных или предполагаемых генеральных долей P и $Q = 1 - P$

n — объем выборки

Пример 1. Впервые исследованная группа объемом $n = 50$ содержала 35 плюсовых объектов (имеющих изучаемый признак), $p = 0{,}70$. Проверяется гипотеза о принадлежности этой группы к генеральной совокупности, в которой таких объектов обычно содержится 50%, $P = 0{,}50$

$$t_{p-P} = \frac{0{,}7 - 0{,}5}{\sqrt{\frac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{50}}} = \frac{0{,}20}{0{,}07} = \underline{\underline{2{,}9}}; \quad \nu = 50 - 1 = 49; \quad t_{st} = \{2{,}0 - 2{,}7 - 3{,}5\}$$

(табл. X)

Вывод. Разность достоверна с вероятностью $\beta > 0{,}99$; ответ отрицателен: изученная группа не может принадлежать к этой генеральной совокупности [вероятность этого очень мала: $(1 - \beta) < 0{,}01$]

Пример 2. Предложена гипотеза: в генеральной совокупности плюсовых объектов должно содержаться 75%, $P = 0{,}75$. Проверка по выборке, в которой при $n = 100$ плюсовых объектов оказалось 70 ($p = 0{,}70$), показала:

$$t_{p-P} = \frac{0{,}75 - 0{,}70}{\sqrt{\frac{0{,}75 \cdot 0{,}25}{100}}} = \underset{\sim}{1{,}2}, \quad \nu = 99, \quad t_{st} = \{2{,}0 - 2{,}6 - 3{,}4\} \text{ (табл. X)}$$

Вывод. Разность явно недостоверна, ответ положителен: гипотеза не опровергнута и может считаться правильной до тех пор, пока не будет опровергнута или заменена более точной гипотезой

Алгоритм 14

Вычисление коэффициента корреляции для малочисленных групп

Первый способ

$$r = \frac{\Sigma V_1 V_2 - \dfrac{\Sigma V_1 \Sigma V_2}{n}}{\sqrt{C_1 C_2}}; \quad (n \geqslant n_{st})$$

V_1, V_2 — даты признаков
C_1, C_2 — дисперсии признаков

$$C = \Sigma V^2 - \frac{(\Sigma V)^2}{n}$$

n — число сравниваемых пар

Второй способ

$$r = \frac{C_1 + C_2 - C_d}{2\sqrt{C_1 C_2}}; \quad (n \geqslant n_{st})$$

C_1, C_2, C_d — дисперсии по первому и второму признакам и по ряду разностей $d = V_1 - V_2$

$$C = \Sigma V^2 - \frac{(\Sigma V)^2}{n} \text{ и } C_d = \Sigma d^2 - \frac{(\Sigma d)^2}{n}$$

n — число сравниваемых пар

V_1	V_2	V_1^2	V_2^2	V_1V_2	V_1	V_2	V_1^2	V_2^2	$d=V_1-V_2$	d^2
3	11	9	121	33	31	27	961	729	+4	16
7	10	49	100	70	22	24	484	576	−2	4
1	7	1	49	7	27	32	728	1024	−5	25
11	4	121	16	44	29	29	841	841	0	0
9	3	81	9	27	21	24	441	576	−3	9
5	9	25	81	45	30	27	900	729	+3	9
2	7	4	49	14	23	23	529	529	0	0
10	4	100	16	40	28	31	784	961	−3	9
4	12	16	144	48	25	30	625	900	−5	25
8	3	64	9	24	24	23	576	529	+1	1
60	70	470	594	352	260	270	6870	7394	−10	98

Первый способ

$$C_1 = 470 - \frac{60^2}{10} = 110$$

$$C_2 = 594 - \frac{70^2}{10} = 104$$

$$r = \frac{352 - \dfrac{60 \cdot 70}{10}}{\sqrt{110 \cdot 104}} = \frac{-68}{107} = -0{,}64$$

$n = 10$, $n_{st} = \{10—15—23\}$ (табл. XII)

Вывод. Отрицательная корреляция в генеральной совокупности достоверна с вероятностью первого порога $\beta > 0{,}95$

Второй способ

$$C_1 = 6870 - \frac{260^2}{10} = 110$$

$$C_2 = 7394 - \frac{270^2}{10} = 104$$

$$C_d = 98 - \frac{10^2}{10} = 88$$

$$r = \frac{110 + 104 - 88}{2\sqrt{110 \cdot 104}} = \frac{+126}{214} = +0{,}59$$

$n = 10$, $n_{st} = \{11—18—27\}$ (табл. XII)

Вывод. Положительная корреляция в генеральной совокупности на грани достоверности первого порога. В исследованиях пониженной ответственности такую корреляцию можно считать достоверной. В ответственных работах следует повторить оценку корреляции на новом более обширном материале

Алгоритм 15

Составление корреляционной решетки для последующего измерения корреляционных связей первого признака (1) со вторым (2)

Первичные измерения

V_1	107	169	121	168	167	124	138	145	130	98
V_2	60	93	54	90	86	57	64	71	47	43
1	133	50	163	87	135	111	$\boxed{188}$	72	140	132
2	57	37	81	50	61	37	101	44	67	55
1	117	165	147	153	149	179	172	142	151	113
2	50	84	73	70	74	$\boxed{104}$	87	69	65	42
1	134	155	93	161	159	80	139	173	137	177
2	59	73	37	80	77	35	66	90	63	95
1	102	136	157	185	127	131	152	115	175	104
2	48	62	75	97	63	53	67	48	93	53

Показатели двух вариационных рядов

$n = 50$; g — число классов $= 1 + 3{,}3 \log 50 \approx 7$; $\qquad k_1 = \frac{138}{7} \approx 20$

$\lim_1 = 50 \div 188\ (138)$; $\quad \lim_2 = 35 \div 104\ (69)$ $\qquad k_2 = \frac{69}{7} \approx 10$

Разноска корреляционной решетки (достаточно обозначить только начала классов)

2 \ 1	50— W = (60)	70— (80)	90— (100)	110— (120)	130— (140)	150— (160)	170— (180)	n_2
W 95—(100)							∷ 4	4
85—(90)						∴ 3	∴ 3	6
75—(80)						5		5
65—(70)					6	∷ 4		10
55—(60)			· 1	·· 2	7			10
45—(50)		· 1	·· 2	∴ 3	·· 2			8
35—(40)	· 1	·· 2	·· 2	·· 2				7
n_1	1	3	5	7	15	12	7	N -

Алгоритм 16

Вычисление коэффициента корреляции по способу сумм для больших групп, по корреляционной решетке при отсутствии достаточной счетной техники

$$r=\frac{C_1'+C_2'-C_d'}{2\sqrt{C_1'C_2'}}\quad [N \geqslant N_{st}]\ \text{табл. XII}$$

$$C_1'=\left(S_2-\frac{S_1^2}{n}\right)_1 \qquad S_1=p_1-q_1\ [=\Sigma fa]$$

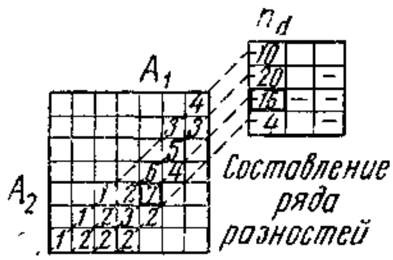
$$C_2'=\left(S_2-\frac{S_1^2}{n}\right)_2 \qquad S_2=p_1+q_1+2(p_2+q_2)\,[=\Sigma fa^2]$$

$$C_d'=\left(S_2-\frac{S_1^2}{n}\right)_d$$

C_1', C_2' — дисперсии, выраженные в квадратах классового промежутка $\left(C'=\frac{C}{k^2}\right)$.

Рассчитываются по указанным рабочим формулам для нижнего и правого суммарных вариационных рядов решетки.

C_d' — дисперсия по ряду разностей между центральными отклонениями средин классов, выраженных в классовых промежутках. Рассчитываются по указанным рабочим формулам для ряда разностей, составленного путем суммирования частот по диагоналям решетки.



Условные средние (A_1A_2) устанавливаются как средины классов, соответствующих центральной ячейке, которая предварительно очерчивается в месте наибольшего скопления частот (можно в любой клетке решетки).

2 \ 1	60	80	100	120	A_1 140	160	180	n_2	$p_1=54$	$p_2=47$	n_d	$p_1=40$	$p_2=10$
100							4	4	4	4	10	10	10
90						3	3	6	10	14	20	30	—
80						5		5	15	29	16	—	—
70					6	4		10	25	—	4	4	—
A_2 60			1	2	$\boxed{7}$			10	—	—	50	$q_1=4$	$q_2=0$
50		1	2	3	2			8	15	—			
40	1	2	2	2				7	7	7			
n_1	1	3	5	7	15	12	7	$N=50$	$q_1=22$	$q_2=7$			
$q_1=30$	1	4	9	16	—	19	7	$p_1=26$	$N=50$				
$q_2=20$	1	5	14	—	—	—	7	$p_2=7$	$N_{st}=\{5-7-9\}$				

$$r=\frac{109{,}7+163{,}5-38{,}1}{2\sqrt{109{,}7\cdot163{,}5}}=+0{,}88$$

	S_1	S_2	$\frac{S_1^2}{N}$	C'	$M=A+k\frac{S_1}{N}$	$\sigma=k\sqrt{\frac{C'}{N-1}}$
1	26−30=−4	26+30+2(7+20)=110	0,3	110−0,3=109,7	$140+20\frac{-4}{50}=138{,}4$	$20\sqrt{\frac{109{,}7}{49}}=29{,}9$
2	54−22=+32	54+22+2(47+7)=184	20,5	184−20,5=163,5	$60+10\frac{+32}{50}=66{,}4$	$10\sqrt{\frac{163{,}5}{49}}=18{,}3$
d	40−4=+36	40+4+2(10+0)=64	25,9	64−25,9=38,1	—	—

Алгоритм 17

Вычисление коэффициента корреляции по способу произведений для больших групп, по корреляционной решетке при наличии достаточной счетной техники
(начиная с арифмометра с полной регистрацией числа оборотов)

$$r = \frac{C'_{1\,2}}{\sqrt{C'_1 C'_2}} \quad [N \geqslant N_{st}] \qquad C'_{1\,2} = \Sigma(a_1 \Sigma f a_2) - \frac{(\Sigma n a_1)(\Sigma n a_2)}{N}$$

$$C'_1 = \Sigma n a_1^2 - L, \quad L = \frac{(\Sigma n a_1)^2}{N}$$

$$C'_2 = \Sigma n a_2^2 - H, \quad H = \frac{(\Sigma n a_2)^2}{N}$$

$C'_{1\,2}$ — дисперсия произведений центральных отклонений вариаций (средин классов) по обоим признакам, причем эти отклонения выражены в классовых промежутках. Рассчитывается на основе произведений условных отклонений (a) по приведенной рабочей формуле.

C'_1, C'_2 — дисперсии первого и второго признака, выраженные в квадратах классового промежутка. Рассчитываются по указанным рабочим формулам для нижнего (1) и правого (2) суммарных вариационных рядов.

$\Sigma n a_1$, $\Sigma n a_1^2$, $\Sigma n a_2$, $\Sigma n a_2^2$, $\Sigma(a_1 \Sigma f a_2)$ рассчитываются на арифмометре путем накапливания элементарных произведений без записи и снятия промежуточных результатов

2 \ 1	60	80	100	120	140	160	180	n_2	a_2
100							4	4	6
90						3	3	6	5
80						5		5	4
70					6	4		10	3
60			1	2	7			10	2
50		1	2	3	2			8	1
40	1	2	2	2				7	0
n_1	1	3	5	7	15	12	7	50	$\Sigma n_1 a_1 = 196$
a_1	0	1	2	3	4	5	6	—	$\Sigma n_1 a_1^2 = 878$
$\Sigma f a_2$	0	1	4	7	34	47	39	=132	$\Sigma n_2 a_2 = 132$; $\Sigma n_2 a_2^2 = 512$

$L = \frac{196^2}{50} = 768{,}3$

$H = \frac{132^2}{50} = 348{,}5$

$C'_1 = 878 - 768{,}3 = 109{,}7$

$C'_2 = 512 - 348{,}5 = 163{,}5$

$\Sigma(a_1 \Sigma f a_2) = 635$

$C'_{1\,2} = 635 - \frac{196 \cdot 132}{50} = +117{,}6$

$$r = \frac{+117{,}6}{\sqrt{109{,}7 \cdot 163{,}5}} = -0{,}88$$

$N = 50$

$N_{st} = \{5 - 7 - 9\}$ (табл. XII)

Алгоритм 18

Полный корреляционный анализ

2 \ 1	60	80	100	120	140	160	180	n_2	a_2	
100							4	4	6	$N = 50$ ... объем решетки; $g = 7$ ... число классов первого признака; $C_1' = \Sigma n_1 a_1^2 - L = 878 - 768,3 = 109,7$
90						3	3	6	5	$C_2' = \Sigma n_2 a_2^2 - H_\Sigma = 512 - 348,5 = 163,5$
80						5		5	4	$C'_{H_i} = \Sigma H_i - H_\Sigma = 489,0 - 348,5 = 140,5$
70					6	4		10	3	$C'_{1\cdot 2} = \Sigma(a_1 \Sigma f a_2) -$
60			1	2	7			10	2	$- \frac{(\Sigma n_1 a_1)(\Sigma n_2 a_2)}{N} =$
50		1	2	3	2			8	1	$= 635 - \frac{196 \cdot 132}{50} = 117,6$
40	1	2	2	2				7	0	$(C'_{1\cdot 2})^2 = 13\,829,8$
n_1	1	3	5	7	15	12	7	50	$\Sigma n a_1 = 196$	$L = \frac{196^2}{50} = 768,3$
a_1	0	1	2	3	4	5	6	—	$\Sigma n a_1^2 = 878$	
$\Sigma f a_2$	0	1	4	7	34	47	39	$=132$	$\Sigma n a_2 = 132$; $\Sigma n a_2^2 = 512$	$H_\Sigma = \frac{132^2}{50} = 348,5$
$H_i = \frac{(\Sigma f a_2)^2}{n_i}$	0	0,3	3,2	7,0	77,1	184,1	217,3	$\Sigma H_i = 489,0$		
$\bar{a}_2 = \frac{\Sigma f a_2}{n_1}$	0,0	0,3	0,8	1,0	2,3	3,9	5,6	$\Sigma(a_1 \Sigma f a_2) = 635$		
$M_2 = A + k_2 \bar{a}_2$	40,0	43,0	48,0	50,0	63,0	79,0	96,0			

Показатель прямолинейной связи (квадрат коэффициента корреляции)

$$r^2 = \frac{(C'_{1\cdot 2})^2}{C_1' C_2'} = \frac{13\,829,8}{109,7 \cdot 163,5} = \underline{\underline{0,77}}, \quad F_{r^2} = \frac{r^2 (N-2)}{1 - r^2} = \frac{(0,77)(48)}{0,23} = \underline{\underline{160,7}}$$

$$\nu_1 = 1, \quad \nu_2 = N - 2 = 48, \quad F_{st} = \{4,0 - 7,2 - 12,3\} \text{ (табл. IX)}$$

Показатель криволинейной связи (квадрат корреляционного отношения)

$$\eta^2 = \frac{C'_{H_i}}{C_2'} = \frac{140,5}{163,5} = \underline{\underline{0,86}}; \quad F_{\eta^2} = \frac{\eta^2 (N-g)}{(1-\eta^2)(g-1)} = \frac{(0,86)(43)}{(0,14)(6)} = \underline{\underline{44,0}}$$

$$\nu_1 = g - 1 = 6, \quad \nu_2 = N - g = 43, \quad F_{st} = \{2,3 - 3,3 - 4,8\}$$

Критерий криволинейности

$$F_\xi = \frac{(\eta^2 - r^2)(N-g)}{(1-\eta^2)(g-2)} = \frac{(0,86 - 0,77)(43)}{(0,14)(5)} = \underline{\underline{5,5}}$$

$$\nu_1 = g - 2 = 5, \quad \nu_2 = N - g = 43, \quad F_{st} = \{2,4 - 3,5 - 5,2\}$$

Алгоритм 19

Дисперсионный анализ однофакторных комплексов
для количественных признаков, для малых групп

	Градации					Число градаций $r=5$	Факториальная дисперсия $C_x = \Sigma H_i - H_\Sigma = 552 - 500 = 52$
	1	2	3	4	5		
Даты V	2 3 1	4 3 6 3	5 6 4 6 9	9 7 6 6	3 6 5 6	$H_\Sigma = \frac{\Sigma V^2}{N} = \frac{100^2}{20} = 500$	Случайная дисперсия $C_z = \Sigma V^2 - \Sigma H_i = 586 - 552 = 34$
n	3	4	5	4	4	Объем комплекса $N = \Sigma n = 20$	Общая дисперсия $C_y = \Sigma V^2 - H_\Sigma = 586 - 500 = 86$
ΣV	6	16	30	28	20	$\Sigma\Sigma V = 100$	
$H_i = \frac{(\Sigma V)^2}{n}$	12	64	180	196	100	$\Sigma H_i = 552$	Факториальная варианса $\sigma_x^2 = \frac{C_x}{r-1} = \frac{52}{4} = 13,00$
ΣV^2	14	70	194	202	106	$\Sigma V^2 = 586$	
Частные средние M_i	2	4	6	7	5	Общая средняя $M_\Sigma = 5$	Случайная варианса $\sigma_z^2 = \frac{C_z}{N-r} = \frac{34}{15} = 2,27$

Показатель силы влияния $\eta_x^2 = \frac{C_x}{C_y} = \frac{52}{86} = \underline{\underline{0,605}}$

Его ошибка $m_{\eta_x^2} = (1 - \eta_x^2) \cdot \frac{r-1}{N-r} = 0,395 \cdot \frac{4}{15} = 0,105$

Его достоверность $\Phi = \frac{\eta_x^2}{m_{\eta_x^2}} = \frac{0,605}{0,105} = \underline{\underline{5,76}}$ $\quad \nu_1 = r - 1 = 4,\ \nu_2 = N - r = 15$ $\quad F_{st} = \{3,1 - 4,9 - 8,3\}$

Доверительные границы генерального показателя (приближенные значения)

$\Delta = F_{st} \cdot m_{\eta_x^2} = 3,1 \cdot 0,105 = 0,33;$ $\quad \bar{\eta}_x^2 = \begin{cases} \tilde{\eta}_x^2 + \Delta = 0,61 + 0,33 = 0,94 \\ \tilde{\eta}_x^2 - \Delta = 0,61 - 0,33 = 0,28 \end{cases}$

$(\beta = 0,95)$

Достоверность по Фишеру

$$F = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_z^2} = \frac{13,00}{2,27} = \underline{\underline{5,74}}$$

Общий вывод. Влияние фактора достоверно с вероятностью $\beta > 0,99$. Для всех объектов данной категории влияние изучаемого фактора может составить не менее 28% от общего влияния всей суммы факторов

Форма итоговой записи

Разнообразие	Дисперсии (суммы квадратов) C	Числа степеней свободы ν	Вариансы (средние квадраты) σ^2
Факториальное (межгрупповое)	52	4	13,00
Случайное (внутригрупповое)	34	15	2,27
Общее	86	19	—

$\eta_x^2 = \underline{\underline{0,605}} \pm 0,105$

$\Phi = \frac{0,605}{0,105} = \underline{\underline{5,76}}$

$F = \frac{13,00}{2,27} = \underline{\underline{5,74}}$ (проверка)

$F_{st} = \{3,1 - 4,9 - 8,3\}$ (табл. IX)

Алгоритм 20

Дисперсионный анализ однофакторных комплексов

для количественных признаков;
для больших групп;
при малозначных датах

A — фактор
$A_1 A_2 A_3 \dots$ градации
V — результативный признак

$V \backslash A$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	n	$r=5$
6	1		3			4	
5	3	2	3	2		10	$H_\Sigma = \frac{S_1^2}{N} =$
[illegible]	2	2		2	2	8	$= \frac{127^2}{30} = 537{,}6$
3		1		1	3	5	
2				1	2	3	
n_a	6	5	6	6	7		$N = \Sigma n = 30$
ΣfV	29	21	33	23	21		$= 127$
$H_i = \frac{(\Sigma fV)^2}{n_A}$	140,2	88,2	181,5	88,2	63,0		$\Sigma H_i = 561{,}1$

$S_1 = \Sigma nV = +127, \quad S_2 = \Sigma nV^2 = 579$

Факториальная дисперсия
$C_x = \Sigma H_i - H_\Sigma = 561{,}1 - 537{,}6 = 23{,}5$

Случайная дисперсия
$C_z = S_2 - \Sigma H_i = 579 - 561{,}1 = 17{,}9$

Общая дисперсия
$C_y = S_2 - H_\Sigma = 579 - 537{,}6 = 41{,}4$

Факториальная варианса
$\sigma_x^2 = \frac{C_x}{r-1} = \frac{23{,}5}{4} = 5{,}875$

Случайная варианса
$\sigma_z^2 = \frac{C_z}{N-r} = \frac{17{,}9}{25} = 0{,}716$

Показатель силы влияния $\eta_x^2 = \frac{C_x}{C_y} = \frac{23{,}5}{41{,}4} = \underline{\underline{0{,}568}}$

Его ошибка $m_{\eta_x^2} = (1 - \eta_x^2)\frac{r-1}{N-r} = 0{,}432 \cdot \frac{4}{25} = 0{,}069$

Его достоверность $\Phi = \frac{\eta_x^2}{m_{\eta_x^2}} = \frac{0{,}568}{0{,}069} = \underline{\underline{8{,}2}}$ $\quad \nu_1 = 4;\ \nu_2 = 25$ $\quad F_{st} = \{2{,}8 - 4{,}2 - 6{,}5\}$ (табл. IX)

Доверительные границы генерального показателя (приближенные значения)

$\Delta = F_{st} \cdot m_{\eta_x^2} = 2{,}8 \cdot 0{,}069 = 0{,}19;\quad \tilde{\eta}_x^2 = \begin{cases} \tilde{\eta}_x^2 + \Delta = 0{,}57 + 0{,}19 = 0{,}76 \\ \tilde{\eta}_x^2 - \Delta = 0{,}57 - 0{,}19 = 0{,}38 \end{cases}$

$(\beta = 0{,}95)$

Достоверность по Фишеру
$F = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_z^2} = \frac{5{,}875}{0{,}716} = \underline{\underline{8{,}2}}$

Общий вывод.
Влияние достоверно в высшей степени.
Для всех объектов данной категории влияние изученного фактора может составить ($\beta = 0{,}95$) не менее 38% и не более 76% от общего влияния всей суммы факторов

Форма итоговой записи

Разнообразие	Дисперсии (суммы квадратов) C	Числа степеней свободы ν	Вариансы (средние квадраты) σ^2	
				$\eta_x^2 = 0{,}568 \pm 0{,}069$
Факториальное (межгрупповое)	23,5	4	5,875	$\Phi = \frac{0{,}568}{0{,}069} = \underline{\underline{8{,}2}}$
Случайное (внутригрупповое)	17,9	25	0,716	$F = \frac{5{,}875}{0{,}716} = \underline{\underline{8{,}2}}$
Общее	41,4	29	1,428	$F_{st} = \{2{,}8 - 4{,}2 - 6{,}5\}$

Алгоритм 21

Дисперсионный анализ однофакторных комплексов

для количественных признаков
для больших групп
при многозначных датах

A—фактор
A_1, A_2 градации
W—вариации } результативный признак
a—условные отклонения } результативный признак

A: W	a	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	n	$r=6$
3500	5	1		1	1			3	$H_\Sigma = \frac{(\Sigma na)^2}{N} = \frac{126^2}{50} = 317\ 52$
3450	4	3	2	1	1	1	1	9	
3400	3	2	3	3	2	1	2	13	
3350	2	1	2	4	3	2	2	14	
3300	1			3	2	2	1	8	
3250	0				1	2		3	
n_a		7	7	12	10	8	6		$N=\Sigma n=50$
Σfa		25	21	29	23	13	15		$=126$
$H_i=\frac{(\Sigma fa)^2}{n_A}$		89,3	63,0	70,1	52,9	21,1	37 5		$\Sigma H_i=333,9$

$S_1=\Sigma na=126$, $S_2=\Sigma na^2=400$

Факториальная дисперсия
$C_x=\Sigma H_i-H_\Sigma=333,9-317,5=16\ 4$

Случайная дисперсия
$C_z=S_2-\Sigma H_i=400-333\ 9=66\ 1$

Общая дисперсия
$C_y=S_2-H_\Sigma=400-317,5=82\ 5$

Факториальная варианса
$$\sigma_x^2=\frac{C_x}{r-1}=\frac{16\ 4}{5}=3,28$$

Случайная варианса
$$\sigma_z^2=\frac{C_z}{N-r}=\frac{66,1}{44}=1\ 50$$

Показатель силы влияния $\eta_x^2=\frac{C_x}{C_y}=\frac{16,4}{82,5}=0,199$

Его ошибка $m_{\eta_x^2}=(1-\eta_x^2)\frac{r-1}{N-r}=0,801\ \frac{5}{44}=0,091$

Его достоверность $\Phi=\frac{\eta_x^2}{m_{\eta_x^2}}=\frac{0,199}{0,091}=2,2$ $\qquad \nu_1=r-1=5,\ \nu_2=N-r=44$ $\qquad F_{st}=\{2,4-3,5-5,1\}$

Доверительные границы генерального показателя в данном случае не определяются, так как выборочный показатель силы влияния оказался недостаточно достоверным (недостоверным)

$$F=\frac{\sigma_x^2}{\sigma_z^2}=\frac{3,28}{1,50}=2,2$$

Общий вывод. В выборочном комплексе обнаружено влияние фактора в размере 20%. Выборочный показатель оказался недостоверным Осталось неизвестным, влияет фактор на объекты изученной категории или не влияет в генеральном комплексе

Форма итоговой записи

Разнообразие	Дисперсии (суммы квадратов) C	Число степеней свободы ν	Варилнсы (средние квадраты) σ
Факториальное (межгрупповое)	16,4	5	3,28
Случайное (внутригрупповое)	66,1	44	1,50
Общее	82,5	49	—

$\eta_x^2=0,199\pm0,091$

$\Phi=\frac{0,199}{0,091}=2,2$

$F=\frac{3,28}{1,50}=2,2$

$F_{st}=\{2,4-3,5-5,1\}$

Алгоритм 22

Дисперсионный анализ однофакторных комплексов для качественных признаков

	Градации 1	2	3	4	5	Число градаций $r=5$; $H_\Sigma=\frac{(\Sigma m)^2}{N}=\frac{48^2}{160}=14,4$	Факториальная дисперсия $C_x=\Sigma H_i-H_\Sigma==1,96-14,4=5,2$
n	20	30	40	30	40	$N=\Sigma n=160$	Случайная дисперсия $C_z=\Sigma m-\Sigma H_i==48-19,6=28,4$
m	2	3	8	15	20	$\Sigma m=48$	Общая дисперсия $C_y=\Sigma m-H_\Sigma==48-14,4=33,6$
$H_i=\frac{m^2}{n}$	0,2	0,3	1,6	7,5	10,0	$\Sigma H_i=19,6$	Факториальная варианса $\sigma_x^2=\frac{C_x}{r-1}=\frac{5,2}{4}=1,300$
$p=\frac{m}{n}$	0,1	0,1	0,2	0,5	0,5	$p_\Sigma=0,3$	Случайная варианса $\sigma_z^2=\frac{C_z}{N-r}=\frac{28,4}{155}=0,183$

Показатель силы влияния $\eta_x^2=\frac{C_x}{C_y}=\frac{5,2}{33,6}=\underline{\underline{\underline{0,155}}}$

Его ошибка $m_{\eta_x^2}=(1-\eta_x^2)\frac{r-1}{N-r}=0,845\cdot\frac{4}{155}=0,0218$

Его достоверность $\Phi=\frac{\eta_x^2}{m_{\eta_x^2}}=\frac{0,155}{0,0218}=\underline{\underline{\underline{7,1}}}$ $\quad \nu_1=r-1=4$; $\nu_2=N-r=155$; $F_{st}=\{2,4-3,4-4,9\}$

Доверительные границы генерального показателя (приближенные значения)

$\Delta=F_{st}\cdot m_{\eta_x^2}=2,4\cdot 0,0218=0,052,\quad \bar{\eta}_x^2 \begin{cases} \tilde{\eta}_x^2+\Delta=0,155+0,052=0,207 \\ \tilde{\eta}_x^2-\Delta=0,155-0,052=0,103 \end{cases}$

$(\beta_1=0,95)$

$F=\frac{\sigma_x^2}{\sigma_z^2}=\frac{1,300}{0,183}=\underline{\underline{\underline{7,1}}}$

Общий вывод. Влияние фактора достоверно в высшей степени. Для всех объектов данной категории влияние изученного фактора может составить ($\beta=0,95$) не менее 10% и не более 21% от общего влияния всей суммы факторов

Форма итоговой записи

Разнообразие	Дисперсии (суммы квадратов) C	Числа степеней свободы ν	Вариансы (средние квадраты) σ^2
Факториальное (межгрупповое)	5,2	4	1,300
Случайное (внутригрупповое)	28,4	155	0,183
Общее	33,6	159	0,211

$\eta_x^2=0,155\pm 0,0218$

$\Phi=\frac{0,155}{0,0218}=\underline{\underline{\underline{7,1}}}$

$F=\frac{1,300}{0,183}=\underline{\underline{\underline{7,1}}}$

$F_{st}=\{2,4-3,4-4,9\}$

Алгоритм 23

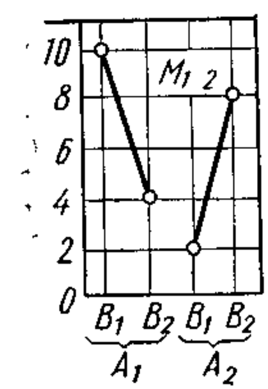
Дисперсионный анализ двухфакторных пропорциональных комплексов

для количественных признаков
для малых групп

Первый фактор A, градации A_1, A_2
Второй фактор B, градации B_1, B_2
Результативный признак V

	A_1		A_2		$r_A=2$, $r_B=2$		n	ΣV	$H=\frac{(\Sigma V)^2}{n}$	M_i
	B_1	B_2	B_1	B_2						
V	8, 12	3, 4, 5	1, 3	6, 8, 10	$H_\Sigma=\frac{(\Sigma V)^2}{N}=360$	A_1	5	32	204,8	6,4
n	2	3	2	3	$N=10$	A_2	5	28	156,8	5,6
ΣV	20	12	4	24	$\Sigma V=60$	$H_A=361,6$				
ΣV^2	208	50	10	200	$\Sigma V^2=468$	B_1	4	24	144,0	6,0
$H_i=\frac{(\Sigma V)^2}{n}$	200	48	8	192	$\Sigma H_i=448$	B_2	6	36	216,0	6,0
$M_{i\,2}=\frac{\Sigma V}{n}$	10	4	2	8	$M_\Sigma=6$	$H_B=360$				

	A	B	AB	x	z		y	
C	H_A-H_Σ 1,6	H_B-H_Σ 0,0	$C_x-C_A-C_B$ 86,4	ΣH_i-H_Σ 88,0	$\Sigma V^2-\Sigma H_i$ 20,0		ΣV^2-H_Σ 108,0	
$\eta_i^2=C_i/C_y$	0,015	0,000	0,800	0,815	0,185		1,000	
ν	r_A-1 1	r_B-1 1	$(r_A-1)(r_B-1)$ 1	r_Ar_B-1 3	$N-r_Ar_B$ 6		$N-1$ 9	
$\sigma_i^2=\dfrac{C_i}{\nu_i}$	1,6	0,0	86,4	29,33	3,33	ν_2 \ ν_1	1	3
$F_i=\dfrac{\sigma_i^2}{\sigma_z^2}$	0,5	0,0	25,9	8,9	—	6 табл. IX	35,5 13,4 6,0	23,7 9,8 4,8



$$m_{\eta^2_{A\cdot B}}=\nu_{AB}\cdot\frac{\eta_z^2}{\nu_z}=1\cdot\frac{0,185}{6}=0,031;\quad \bar{\eta}^2_{AB}=\{0,61\div 0,99\}$$

$$m_{\eta_x^2}=(1-\eta_x^2)\frac{\nu_x}{\nu_z}=0,092;\quad \bar{\eta}_x^2=\{0,38\div 1,00\}$$

Выводы.

1. В выборочном комплексе оказались достоверными только взаимодействие градаций $\tilde{\eta}^2_{AB}=\underline{\underline{0,80}}\,(0,61\div 0,99)$ и суммарное действие факторов $\tilde{\eta}_x^2=\underline{0,82}\,(0,38\div 1,00)$.
2. Это означает, что сила каждого фактора в значительной степени определяется градацией другого фактора. При A_1 второй фактор ($B_1\to B_2$) понижает результативный признак в среднем с 10 до 4; при A_2 второй фактор ($B_1\to B_2$), наоборот, повышает результативный признак в среднем с 2 до 8.
3. Анализ действия каждого такого фактора в отдельности без совместного анализа действия обоих факторов дает ложное заключение о слабом, недостоверном влиянии или о полном отсутствии влияния ($\eta^2=0$) каждого из таких факторов в отдельности, хотя эти факторы могут иметь большую силу действия, но только при определенной градации другого фактора

Алгоритм 24

Дисперсионный анализ двухфакторных пропорциональных комплексов

для количественных признаков
для больших групп
$A = 10, \ k = 10$

первый фактор A, градации $A_1 A_2$
второй фактор B, градации $B_1 B_2 B_3$
результативный признак:
вариации W
условные отклонения a

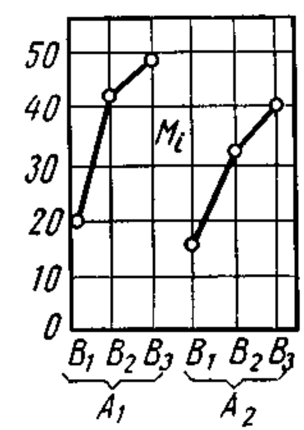
W	a \ A, B	A_1: B_1	A_1: B_2	A_1: B_3	A_2: B_1	A_2: B_2	A_2: B_3	$r_A=2$, $r_B=3$
60	5			2				$H_\Sigma = \frac{(\Sigma fa)^2}{N} = \frac{131^2}{50} = 343,2$
50	4		4	4		1	2	
40	3		6	3		2	5	
30	2	1	2			6	2	
20	1	2			2	3		
10	0	1			2			
n		4	12	9	4	12	9	$N = 50$
Σfa		4	38	35	2	25	27	$\Sigma fa = 131$
Σfa^2		6	126	141	2	61	85	$\Sigma fa^2 = 421$
$H_i = \frac{(\Sigma fa)^2}{n}$		4,0	120,3	136,1	1,0	52,1	81,0	$\Sigma H_i = 394,5$
$\bar{a} = \frac{\Sigma fa}{n}$		1,0	3,2	3,9	0,5	2,1	3,0	
$M_i = A + k\bar{a}$		20,0	42,0	49,0	15,0	31,0	40,0	

	n	Σfa	$H_i = \frac{(\Sigma fa)^2}{n}$	$\bar{a}$	$M_i = A + k\bar{a}$
A_1	25	77	237,2	3,08	40,8
A_2	25	54	116,4	2,16	31,6
			$H_A = 353,6$		
B_1	8	6	4,5	0,75	17,5
B_2	24′	63	165,4	2,63	36,3
B_3	18	62	213,6	3,44	44,4
			$H_B = 383,5$		

Продолжение алгоритма 24

	A	B	AB	x	z	y
C	$H_A - H_\Sigma$ 10,4	$H_B - H_\Sigma$ 40,3	$C_x - C_A - C_B$ 0,6	$\Sigma H_i - H_\Sigma$ 51,3	$\Sigma fa^2 - \Sigma H_i$ 26,5	$\Sigma fa^2 - H_\Sigma$ 77,8
$\eta_i^2 = \dfrac{C_i}{C_y}$	0,134	0,518	0,008	0,660	0,340	1,000
ν	$r_A - 1$ 1	$r_B - 1$ 2	$(r_A - 1)(r_B - 1)$ 2	$r_A r_B - 1$ 5	$N - r_A r_B$ 44	$N - 1$ 49
$\sigma_i^2 = \dfrac{C_i}{\nu_i}$	10,4	20,2	0,3	10,3	0,6	
$F_i = \dfrac{\sigma_i^2}{\sigma_z^2}$	17,3	33,7	0,5	17,2	—	

ν_1 \ ν_2	1	2	5
44 табл. IX	12,5	8,2	5,1
	7,2	5,1	3,5
	4,1	3,2	2,4



$$m_{\eta_A^2} = \nu_A \cdot \frac{\eta_z^2}{\nu_z} = 1 \cdot \frac{0,34}{44} = 0,0077; \quad \bar{\eta}_A^2 = \{0,10 \div 0,17\}$$

$$m_{\eta_B^2} = \nu_B \cdot \frac{\eta_z^2}{\nu_z} = 2 \cdot \frac{0,34}{44} = 0,0154; \quad \bar{\eta}_B^2 = \{0,47 \div 0,57\}$$

$$m_{\eta_x^2} = (1 - \eta_x^2) \cdot \frac{\nu_x}{\nu_z} = 0,34 \frac{5}{44} = 0,0386; \quad \bar{\eta}_x^2 = \{0,57 \div 0,75\}$$

Выводы.

1. В высшей степени достоверным оказалось влияние каждого фактора в отдельности и их суммарного действия.
2. Влияние взаимодействия градаций оказалось очень малым и совершенно недостоверным.
3. Это значит, что в исследовании не обнаружено зависимости влияния каждого фактора от того, при какой градации другого фактора он действовал

Алгоритм 25

Дисперсионный анализ двухфакторных пропорциональных комплексов

для качественных признаков

	A_1				A_2				A_3				$r_A=3$, $r_B=4$
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_1	B_2	B_3	B_4	B_1	B_2	B_3	B_4	
n	10	20	10	20	20	40	20	40	10	20	10	20	$N=\Sigma n=240$
m	5	12	7	16	18	28	10	12	1	6	5	14	$\Sigma m=134$
$H_i=\frac{m^2}{n}$	2,5	7,2	4,9	12,8	16,2	19,6	5,0	3,6	0,1	1,8	2,5	9,8	$\Sigma H_i=86,0$
$P_x=\frac{m}{n}$	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	0,70	0,50	0,30	0,10	0,30	0,50	0,70	$H_\Sigma=\frac{(\Sigma m)^2}{\Sigma n}=74,82$

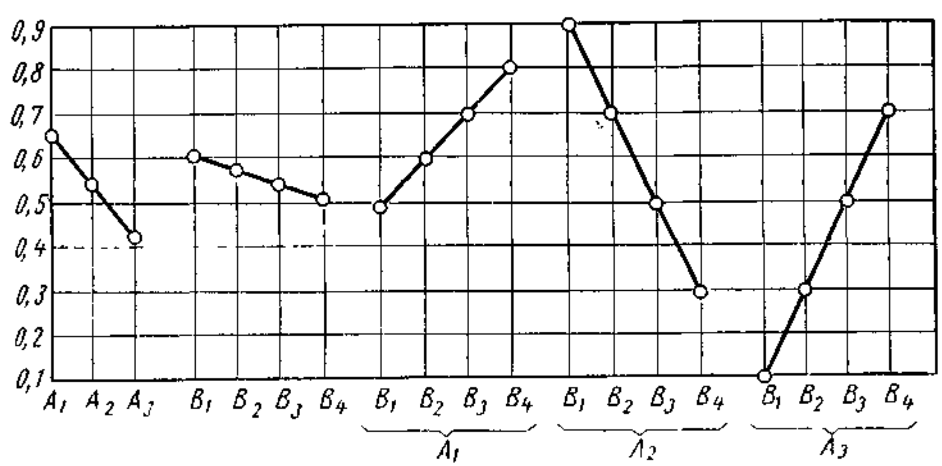
	A	B	AB	x	z	y
C_i	H_A-H_Σ 1,65	H_B-H_Σ 0,18	$C_x-C_A-C_B$ 9,35	ΣH_i-H_Σ 11,18	$\Sigma_m-\Sigma H_i$ 48,0	Σ_m-H_Σ 59,18
$\eta_i^2=\frac{C_i}{C_y}$	0,028	0,003	0,158	0,189	0,811	1,000

	Σn	Σm	$H_i=\frac{(\Sigma m)^2}{\Sigma n}$	P_i
A_1	60	40	26,67	0,67
A_2	120	68	38,53	0,57
A_3	60	26	11,27	0,43
$H_A=76,47$				
B_1	40	24	14,40	0,60
B_2	80	46	26,45	0,58
B_3	40	22	12,10	0,55
B_4	80	42	22,05	0,53
$H_B=75,00$				

Продолжение алгоритма 25

	A	B	AB	x	z	y
ν	r_A-1 2	r_B-1 3	$(r_A-1)(r_B-1)$ 6	r_Ar_B-1 11	$N-r_Ar_B$ 228	$N-1$ 239
$\sigma_i^2=\dfrac{C_i}{\nu_i}$	0,83	0,06	1,56	1,02	0,21	—
$F=\dfrac{\sigma_i^2}{\sigma_z^2}$	$\underline{4,0}$	$\utilde{0,3}$	$\underline{\underline{\underline{7,4}}}$	$\underline{\underline{\underline{4,9}}}$	—	—

ν_2 \ ν_1	2	3	6	11
228	7,2	5,6	3,9	3,1
	4,7	3,9	2,9	2,3
	3,0	2,6	2,1	1,8



Алгоритм 26

Дисперсионный анализ двухфакторных неравномерных комплексов

для количественных признаков
для малых групп

A, B / V	A_1: B_1	A_1: B_2	A_1: B_3	A_2: B_1	A_2: B_2	A_2: B_3	$r_A=2$, $r_B=2$
V	2,3,4	3,3, 3,4	4,5,6, 7,8	2,3, 3,4	7,8,8, 9,9	4,5,5, 5,6	
n	3	4	5	4	5	5	$N=26$
ΣV	9	13	30	12	41	25	$\Sigma V=130$
ΣV^2	29	43	190	38	339	127	$\Sigma V^2=766$
$H_i=\frac{(\Sigma V)^2}{n}$	27,0	42,3	180,0	36,0	336,2	125,0	$\Sigma H_i=746,5$
$M_x=\frac{\Sigma V}{n}$	3,0	3,3	6,0	3,0	8,2	5,0	$\Sigma M_x=28,5$
M_x^2	9,00	10,89	36,00	9,00	67,24	25,00	$\Sigma M_x^2=157,13$

	Число средних g	ΣM_x	$M_i=\frac{\Sigma M_x}{g}$	M_i^2
A_1	3	12,3	4,1	16,81
A_2	3	16,2	5,4	29,16
$H_A=\Sigma M_A^2=45,97$				
B_1	2	6,0	3,0	9,0
B_2	2	11,5	~~5,8~~ 5,75	33,64 33,0625
B_3	2	11,0	5,5	30,25
$H_B=\Sigma M_B^2=72,89$ 72,3125				

$$M=\frac{\Sigma M_x}{r_A\cdot r_B}=\frac{28,5}{6}=4,75;\quad M^2=22,56$$

$$H_\Sigma=\frac{(\Sigma V)^2}{N}=\frac{130^2}{26}=650$$

$$C'_A=N\left(\frac{\Sigma M_A^2}{r_A}-M^2\right)=26\left(\frac{45,97}{2}-22,56\right)=\cancel{11,18}\quad 10,185$$

$$C_y=\Sigma V^2-H_\Sigma=766-650=116$$

$$C'_B = N\left(\frac{\Sigma M_B^2}{r_B} - M^2\right) = 26\left(\frac{72,89}{3} - 22,56\right) = \cancel{45,24}$$

$$C_z = \Sigma V^2 - \Sigma H_i = 766 - 746,5 = 19,5$$

$$C'_x = N\left(\frac{\Sigma M_x^2}{r_A \cdot r_B} - M^2\right) = 26\left(\frac{157,13}{6} - 22,56\right) = \boxed{94,38}$$

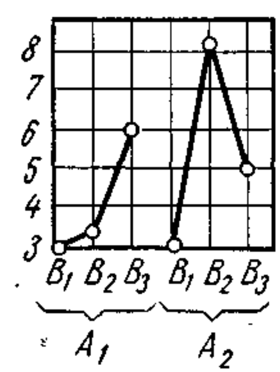
$$C_x = \Sigma H_i - H_\Sigma = 746,5 - 650 = \boxed{96,5}$$

$$C'_{AB} = C'_x - C'_A - C'_B = 94,38 - 11,18 - 45,24 = 37,96$$

$$\alpha = \frac{C_x}{C'_x} = \frac{96,5}{94,38} = 1,022$$

	A	B	AB	x	z	y
C'	11,18	45,24	37,96	94,38	—	—
$C = \alpha \cdot C'$	11,4	46,3	38,8	96,5	19,5	116,0
$\eta^2 = \frac{C_i}{C_y}$	0,098	0,399	0,335	0,832	0,168	1,000
ν_i	$r_A - 1$ 1	$r_B - 1$ 2	$\nu_A \cdot \nu_B$ 2	$r_A \cdot r_B - 1$ 5	$N - r_A \cdot r_B$ 20	$N - 1$ 25
$\sigma_i^2 = \frac{C_i}{\nu_i}$	11,4	23,2	19,4	19,3	0,98	
$F_i = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_z^2}$	11,6	23,8	19,8	19,7		

ν_2 \ ν_1	1	2	5
20 табл. IX	14,8	10,0	6,5
	8,1	5,8	4,1
	4,3	3,5	2,7



Алгоритм 27

Дисперсионный анализ двухфакторных неравномерных комплексов

для качественных признаков

	A_1			A_2			$r_A=2$; $r_B=3$
	B_1	B_2	B_3	B_1	B_2	B_3	
n	70	20	10	10	100	90	$N=300$
m	14	10	8	1	30	45	$\Sigma m=108$
$H_i=\frac{m^2}{n}$	2,8	5,0	6,4	0,1	9,0	22,5	$\Sigma H_i=45,8$
p_x	0,2	0,5	0,8	0,1	0,3	0,5	$\Sigma p_x=2,4$
p_x^2	0,04	0,25	0,64	0,01	0,09	0,25	$\Sigma p_x^2=1,28$

	g	Σp_x	$M_i=\frac{\Sigma p_x}{g}$	M_i^2
A_1	3	1,5	0,5	0,25
A_2	3	0,9	0,3	0,09
$\Sigma M_A^2=0,340$				
B_1	2	0,3	0,15	0,0225
B_2	2	0,8	0,40	0,1600
B_3	2	1,3	0,65	0,4225
$\Sigma M_B^2=0,605$				

$$M=\frac{\Sigma p_x}{r_A r_B}=\frac{2,4}{6}=0,4;\quad M^2=0,16$$

$$H_\Sigma=\frac{(\Sigma m)^2}{N}=\frac{108^2}{300}=38,9$$

$$C_A'=N\left(\frac{\Sigma M_A^2}{r_A}-M^2\right)=300\left(\frac{0,34}{2}-0,16\right)=3,0$$

$$C_y=\Sigma m-H_\Sigma=108-38,9=69,1$$

$$C_B'=N\left(\frac{\Sigma M_B^2}{r_B}-M^2\right)=300\left(\frac{0,605}{3}-0,16\right)=12,6$$

$$C_z=\Sigma m-\Sigma H_i=108-45,8=62,2$$

$$C_x' = N\left(\frac{\Sigma p_x^2}{r_A r_B} - M^2\right) = 300\left(\frac{1,28}{6} - 0,16\right) = \boxed{15,9}$$

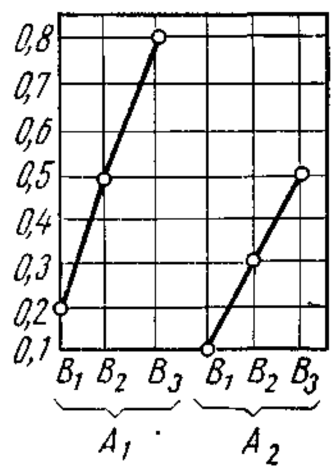
$$C_x = \Sigma H_i - H_\Sigma = 45,8 - 38,9 = \boxed{6,9}$$

$$C_{AB}' = C_x' - C_A' - C_B' = 15,9 - 3,0 - 12,6 = 0,3$$

$$\alpha = \frac{C_x}{C_x'} = \frac{6,9}{15,9} = 0,434$$

	A	B	AB	x	z	y
C'	3,0	12,6	0,3	15,9	—	—
$C = \alpha C'$	1,30	5,47	0,13	$C_x = 6,90$	$C_z = 62,2$	$C_y = 69,1$
$\eta_i^2 = \frac{C_i}{C_y}$	0,019	0,079	0,002	0,100	0,900	1,000
ν	$r_A - 1$ 1	$r_B - 1$ 2	$(r_A-1)(r_B-1)$ 2	$r_A r_B - 1$ 5	$N - r_A r_B$ 294	$N - 1$ 299
$\sigma_i^2 = \frac{C_i}{\nu_i}$	1,30	2,74	0,07	1,38	0,212	
$F_i = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_z^2}$	$\underline{6,1}$	$\underline{\underline{\underline{12,9}}}$	0,3	$\underline{\underline{\underline{6,5}}}$	—	

ν_2 \ ν_1	1	2	3
294	11,2	7,2	4,3
	6,8	4,7	3,2
	3,9	3,0	2,3



Алгоритм 28

Дисперсионный анализ двухфакторных иерархических комплексов, равномерных, пропорциональных и неравномерных

Применяется, когда для каждой градации первого фактора A невозможно подобрать одинаковые градации второго фактора B. Влияние одного второго фактора выделить невозможно.

Вскрываются влияния одного первого фактора $[A]$, второго фактора вместе с сочетанием градаций обоих факторов $[B+AB]$, суммарное обоих факторов $[x]$, случайное $[z]$ и общее $[y]$

B неравномерных комплексах искажения, связанные с неортогональностью, затрагивают только дисперсию по второму фактору совместно с сочетаниями $[B+AB]$

Для количественных признаков

	A_1		A_2				$r=2$
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	$g=6$
V	1,3	2,3, 4,7,	3,4, 5,	4,5, 6,	2,5, 6,7,	6,8	$H_\Sigma = \frac{81^2}{18} = 364{,}5$
n	2	4	3	3	4	2	$N=18$
ΣV	4	16	12	15	20	14	$\Sigma V = 81$
$H_i = \frac{(\Sigma V)^2}{n}$	8	64	48	75	100	98	$\Sigma H_i = 393$
ΣV^2	10	78	511	77	114	100	$\Sigma V^2 = 429$
M_i	2	4	4	5	5	7	$M_\Sigma = 4{,}5$

A:	n	ΣV	$H_A = \frac{(\Sigma V)^2}{n}$	M_A	
A_1	6	20	66,67	3,33	$\Sigma H_A = 66{,}67 + 310{,}08 = 376{,}75$
A_2	12	61	310,08	5,08	

	A	$B+AB$	x	z	y
C	$\Sigma H_A - H_\Sigma$ 12,25	$C_x - C_A$ 16,25	$\Sigma H_i - H_\Sigma$ 28,50	$\Sigma V^2 - \Sigma H_i$ 36,00	$\Sigma V^2 - H_\Sigma$ 64,5
$\eta^2 = \frac{C_i}{C_y}$	0,19	0,25	0,44	0,56	1,00
ν	$r-1$ 1	$g-r$ 4	$g-1$ 5	$N-g$ 12	$N-1$ 17
$\sigma^2 = \frac{C_i}{\nu_i}$	12,25	4,06	5,70	3,00	—
$F = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_z^2}$	4,1	1,4	1,9	—	—
F_{st} 0,999	12,6	9,6	8,9	—	—
F_{st} 0,99	9,3	6,4	6,1		
F_{st} 0,95	4,8	3,3	3,1		

Для качественных признаков

	A_1		A_2				$r=2$
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	$g=6$
n	70	30	10	10	100	80	$N=300$
m	14	15	8	1	30	40	$\Sigma m=108$
$H_i=\dfrac{m^2}{n}$	2,8	7,5	6,4	0,1	9,0	20,0	$\Sigma H_i=45,8$
p_i	0,2	0,5	0,8	0,1	0,3	0,5	$H_\Sigma=\dfrac{(\Sigma m)^2}{N}=38,9$

$A:$		n	m	$H_A=\dfrac{m^2}{n}$	P_A	
	A_1	100	29	8,410	0,290	$\Sigma H_A=8,41+31,21=39,62$
	A_2	200	79	31,205	0,395	

	A	$B+AB$	x	z	y
C	ΣH_A-H_Σ 0,72	C_x-C_A 6,18	ΣH_i-H_Σ 6,90	$\Sigma m-\Sigma H_i$ 62,20	$\Sigma m-H_\Sigma$ 69,10
$\eta^2=\dfrac{C_i}{C_y}$	0,01	0,09	0,10	0,90	1,00
ν	$r-1$ 1	$g-r$ 4	$g-1$ 5	$N-g$ 294	$N-1$ 299
$\sigma^2=\dfrac{C_i}{\nu_i}$	0,72	1,54	1,38	0,21	—
$F=\dfrac{\sigma_i^2}{\sigma_z^2}$	3,4	$\underline{\underline{7,3}}$	$\underline{\underline{6,6}}$	—	—
F_{st} 0,999	11,1	4,7	4,2	—	—
F_{st} 0,98	6,7	3,4	3,1		
F_{st} 0,95	3,9	2,4	2,2		

Алгоритм 29

Дисперсионный анализ двухфакторных неравномерных комплексов для количественных признаков, для больших групп

A, B		A_1*		A_2		A_3		$r_A=3$, $r_B=2$
W	a	B_1	B_2	B_1	B_2	B_1	B_2	
45	5						2	—
40	4		1		2		5	
35	3		1	1	1	1		
30	2	1	3	1	2	1	1	
25	1	2	3			5		
20	0	3		3		3		
n		4	8	5	5	10	8	$N = 40$
Σfa		4	16	5	15	10	32	$S_1 = 82$
Σfa^2		6	40	13	49	18	134	$S_2 = 260$
$H_i=\frac{(\Sigma fa)^2}{n}$		4,0	32,0	5,0	45,0	10,0	128,0	$\Sigma H_i=224$
$\bar{a}=\frac{\Sigma fa}{n}$		1	2	1	3	1	4	$\Sigma\bar{a} = 12$
$\bar{a}^2$		1	4	1	9	1	16	$\Sigma\bar{a}^2 = 32$

	g	$\Sigma\bar{a}$	$M_i=\frac{\Sigma\bar{a}}{g}$	M_i^2
A_1	2	3	1,5	2,25
A_2	2	4	2,0	4,00
A_3	2	5	2,5	6,25
$H_A = 12{,}50$				
B_1	3	3	1,0	1,00
B_2	3	9	3,0	9,00
$H_B = 10{,}000$				

ν_2 \ ν_1	1	2	5
34	13,1	8,6	5,4
	7,4	5,3	3,6
	4 1	3,3	2,5

$$M = \frac{\Sigma\bar{a}}{r_A r_B} = \frac{12}{6} = 2,\quad M^2 = 4$$

$$H_\Sigma = \frac{S_1^2}{N} = \frac{82^2}{40} = 168\ 1$$

$$C'_A = 40\left(\frac{H_A}{r_A} - M^2\right) = 40\left(\frac{12{,}50}{3} - 4\right) = 6{,}8$$

$$C_y = S_2 - H_\Sigma = 260 - 168{,}1 = 91{,}9$$

$$C'_B = 40\left(\frac{H_B}{r_B} - M^2\right) = 40\left(\frac{10{,}0}{2} - 4\right) = 40{,}0$$

$$C_z = S_2 - \Sigma H_i = 260 - 224 = 36{,}0$$

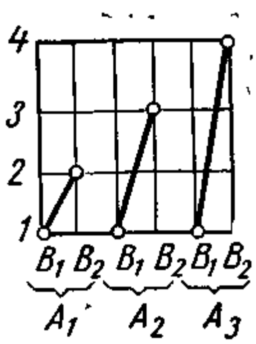
$$C'_x = 40\left(\frac{\Sigma\bar{a}^2}{r_A r_B} - M^2\right) = 40\left(\frac{32}{6} - 4\right) = \boxed{53{,}3}$$

$$C_x = \Sigma H_i - H_\Sigma = 224 - 168{,}1 = \boxed{55{,}9}$$

$$C'_{AB} = C'_x - C'_A - C'_B = 53{,}3 - 6{,}8 - 40{,}0 = 6{,}5$$

$$\alpha = \frac{C_x}{C'_x} = \frac{55{,}9}{53{,}3} = 1{,}049$$

	A	B	AB	x	z	y
C'	6,8	40,0	6,5	53,3	—	—
$C = \alpha C'$	7,1	42,0	6,8	55,9	36,0	91,9
$\eta_i^2 = \frac{C_i}{C_y}$	0,077	0,457	0,074	0,608	0,392	1,000
ν	r_A-1 2	r_B-1 1	$(r_A-1)(r_B-1)$ 2	$r_A r_B-1$ 5	$N-r_A r_B$ 34	$N-1$ 39
$\sigma_i^2 = \frac{C_i}{\nu_i}$	3,6	40,0	3,4	11,2	1,059	—
$F_i = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_z^2}$	$\underline{3{,}4}$	$\underline{\underline{\underline{37{,}8}}}$	3,2	$\underline{\underline{\underline{10{,}6}}}$	—	—



Алгоритм 30

Дисперсионный анализ однофакторных комплексов при множественной характеристике основных объектов

Градации	I		II				III			$r=3$
Основные объекты	1	2	1	2	3	4	1	2	3	$n=2,\ 4,\ 3$
Первичные даты V_i	3 1 1	3 3 2 1	7 6 6 4	8 7 6	7 5 4 4	9 6 5	2 2 1	4 2 1	3 2 1	$H_{\Sigma}=\frac{116^2}{30}=449$
Σn_i	7		14				9			$\Sigma n_i=30$
ΣV_i	14		84				18			$\Sigma Vi=116$
$H_i=\frac{(\Sigma V_i)^2}{\Sigma n_i}$	28		504				36			$\Sigma H_i=568$
ΣV_i^2	34		534				44			$\Sigma V_i^2=612$

	x	z	y
C	$568-449=119$	$612-568=44$	$612-449=163$
η^2	$\frac{119}{163}=0{,}73$	$\frac{44}{163}=0{,}27$	1,00
ν	$3-1=2$	$30-3=27$	$30-1=29$
σ^2	$\frac{119}{2}=59{,}5$	$\frac{44}{27}=1{,}63$	$\nu_1=2,\ \nu_2=27$
F	$\frac{59{,}5}{1{,}63}=\underline{\underline{36{,}5}}$		$F_{st}=\{3{,}3-5{,}5-9{,}0\}$

Показатель силы влияния $\eta_x^2=\frac{C_x}{C_y}=0{,}73$

Его ошибка $m_{\eta_x^2}=(1-\eta_x^2)\cdot\frac{r-1}{N-r}=(1-0{,}73)\frac{3-1}{30-3}=0{,}02;$

$$\Phi=\frac{0{,}73}{0{,}02}=\underline{\underline{36{,}5}}$$

$\Delta=F_{0{,}95}\cdot m=3{,}3\cdot 0{,}02=0{,}066$

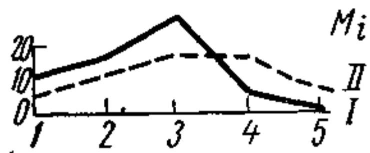
Доверительные границы генерального параметра при $\beta=0{,}95$

$\overline{\eta}_x^2=0{,}73\pm 0{,}07=\{0{,}66\div 0{,}80\}$

Алгоритм 31

Сравнение двух рядов регрессии (I и II)

Градации		1	2	3	4	5	
V	I	10	13, 16, 19	20, 26, 27, 28, 29, 32	3, 6, 9	0	$g = 5$ (число градаций)
	II	3, 6, 9	8, 10, 12	10, 13, 14, 15, 16, 22	8, 14, 15, 16, 17, 20	1, 8, 15	
n	I	1	3	6	3	1	N I $= 14$
	II	3	3	6	6	3	N II $= 21$; $N = 35$
ΣV	I	10	48	162	18	0	
	II	18	30	90	90	24	
$h = \frac{(\Sigma V)^2}{n}$	I	100	768	4374	108	0	Σh I $= 5350$
	II	108	300	1350	1350	192	Σh II $= 3300$; $\Sigma h = 8650$
ΣV^2	I	100	786	4454	126	0	ΣV^2 I $= 5466$
	II	126	308	1430	1430	290	ΣV^2 II $= 3584$; $\Sigma V^2 = 9050$
$M = \frac{\Sigma V}{n}$	I	10	16	27	6	0	
	II	6	10	15	15	8	
$d = M_{\mathrm{I}} - M_{\mathrm{II}}$		$+4$	$+6$	$+12$	-9	-8	
d^2		16	36	144	81	64	
$q = \frac{n_{\mathrm{I}} \cdot n_{\mathrm{II}}}{n_{\mathrm{I}} + n_{\mathrm{II}}}$		$\frac{1 \cdot 3}{1+3} = 0{,}75$	$\frac{9}{6} = 1{,}50$	$\frac{36}{12} = 3{,}00$	$\frac{18}{9} = 2{,}00$	$\frac{3}{4} = 0{,}75$	$\Sigma q = 8$
$q \cdot d$		$+3$	$+9$	$+36$	-18	-6	$T_1 = +24$
$q \cdot d^2$		12	54	432	162	48	$T_2' = 708$



$$\nu_z = N - 2g = 35 - 2 \cdot 5 = 25; \quad \sigma_z^2 = \frac{\Sigma V^2 - \Sigma h}{\nu_z} = \frac{9050 - 8650}{25} = 16$$

Критерий различия рядов

$$F_1 = \frac{T_2}{g\sigma_z^2} \begin{Bmatrix} \nu_1 = g \\ \nu_2 = \nu_z \end{Bmatrix} = \frac{708}{5 \cdot 16} = \underline{\underline{8{,}9}} \qquad \begin{matrix} \nu_1 = 5 \\ \nu_2 = 25 \end{matrix} \quad F_{st} = \{2{,}6 - 3{,}9 - 5{,}9\}$$

Критерий превышения одного ряда над другим

$$F_2 = \frac{T_1^2 N}{N_{\mathrm{I}} N_{\mathrm{II}} \sigma_z^2} \begin{Bmatrix} \nu_1 = 1 \\ \nu_2 = \nu_z \end{Bmatrix} = \frac{24^2 \cdot 35}{14 \cdot 21 \cdot 16} = \underline{4{,}3} \qquad \begin{matrix} \nu_1 = 1 \\ \nu_2 = 25 \end{matrix} \quad F_{st} = \{4{,}2 - 7{,}8 - 13{,}9\}$$

Критерий непараллельности рядов

$$F_3 = \frac{T_2 - \frac{T_1^2}{\Sigma q}}{g \cdot \sigma_z^2} \begin{Bmatrix} \nu_1 = g - 1 \\ \nu_2 = \nu_z \end{Bmatrix} = \frac{708 - \frac{24^2}{8}}{5 \cdot 16} = \underline{\underline{8{,}0}} \qquad \begin{matrix} \nu_1 = 4 \\ \nu_2 = 25 \end{matrix} \quad F_{st} = \{2{,}8 - 4{,}2 - 6{,}5\}$$

Определение числа целых знаков в частном

Обозначения.

Число целых знаков (ЧЦЗ) в делимом — a, в делителе — b, в частном — c

ЧЦЗ в числах:

625 + 3	0,0625 — 1
62,5 + 2	0,00625 — 2
6,25 + 1	0,000625 — 3
0,625 + 0	0,0000625 — 4

Правила.

I. Если первая слева цифра делителя меньше, чем в делимом, то

$$\boxed{c = a - b + 1}$$

$$625 : 25 = 25\,(3 - 2 + 1 = 2),\quad 625 . 2500 = 0{,}25\,(3 - 4 + 1 = 0)$$

$$0{,}00625 : 250 = 0{,}000025\,(-2 - 3 + 1 = -4)$$

$$0{,}00625 : 0{,}0025 = 2{,}5\ (-2 + 2 + 1 = +1)$$

II. Если первая слева цифра делителя больше, чем в делимом, то

$$\boxed{c = a - b}$$

$$125 : 25 = 5\,(3 - 2 = 1);\quad 125 : 2500 = 0{,}05\ (3 - 4 = -1)$$

$$0{,}00125 : 250 = 0{,}000005\,(-2 - 3 = -5)$$

$$0{,}00125 \cdot 0{,}0025 = 0{,}5\ (-2 + 2 = 0)$$

III. Если первые слева цифры делителя и делимого равны, то расчет ведется по вторым цифрам; если и они равны, то по третьим и т. д.

$$333 : 332 = 1{,}003\,(3 - 3 + 1 = +1);\quad 333 : 335 = 0{,}994\,(3 - 3 = 0)$$

$$4444 : 444 = 10{,}009\,(4 - 3 + 1 = +2);\quad 0{,}12 : 0{,}00125 = 96\,(0 + 2 = +2)$$

IV. Если все цифры кроме нулей справа или слева у делителя и делимого равны, применяется I правило

$$1000 : 10 = 100\,(4 - 2 + 1 = +3);\quad 40 : 4000 = 0{,}01\,(2 - 4 + 1 = -1)$$

$$0{,}002 : 0{,}02 = 0{,}1\ (-2 + 1 + 1 = 0),$$

$$700 : 0{,}007 = 100\,000\,(3 + 2 + 1 = +6)$$

$$0{,}0395 : 0{,}00395 = 10\ (-1 + 2 + 1 = +2)$$

Таблица VI

Первая функция нормированного отклонения

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$ (ординаты нормальной кривой)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	39 894	39 892	39 886	39 876	39 862	39 844	39 822	39 797	39 767	39 733
0,1	39 695	39 654	39 608	39 559	39 505	39 448	39 387	39 322	39 253	39 181
0,2	39 104	39 024	38 940	38 853	38 762	38 667	38 568	38 466	38 361	38 251
0,3	38 139	38 023	37 903	37 780	37 651	37 524	37 391	37 255	37 115	36 973
0,4	36 827	36 678	36 526	36 371	36 213	36 053	35 889	35 723	35 553	35 381
0,5	35 207	35 029	34 849	34 667	34 482	34 294	34 105	33 912	33 718	33 521
0,6	33 322	33 121	32 918	32 713	32 506	32 297	32 086	31 874	31 659	31 443
0,7	31 225	31 006	30 785	30 563	30 339	30 114	29 887	29 659	29 430	29 200
0,8	28 969	28 737	28 504	28 269	28 034	27 798	27 562	27 324	27 086	26 848
0,9	26 609	26 369	26 129	25 888	25 647	25 406	25 164	24 923	24 681	24 439
1,0	24 197	23 955	23 713	23 471	23 230	22 983	22 747	22 506	22 265	22 025
1,1	21 785	21 546	21 307	21 069	20 831	20 594	20 357	20 121	19 886	19 652
1,2	19 419	19 186	18 954	18 724	18 494	18 265	18 037	17 810	17 585	17 360
1,3	17 137	16 915	16 694	16 474	16 256	16 038	15 822	15 608	15 395	15 183
1,4	14 973	14 764	14 556	14 350	14 146	13 943	13 742	13 542	13 344	13 147
1,5	12 952	12 758	12 566	12 376	12 188	12 001	11 816	11 632	11 450	11 270
1,6	11 092	10 915	10 741	10 567	10 396	10 226	10 059	09 893	09 728	09 566
1,7	09 405	09 246	09 089	08 933	08 780	08 628	08 478	08 329	08 183	08 038
1,8	07 895	07 754	07 614	07 477	07 341	07 206	07 074	06 943	06 814	06 687
1,9	06 562	06 438	06 316	06 195	06 077	05 959	05 844	05 730	05 618	05 508
2,0	05 399	05 292	05 186	05 082	04 980	04 879	04 780	04 682	04 586	04 491
2,1	04 398	04 307	04 217	04 128	04 041	03 955	03 871	03 788	03 706	03 626
2,2	03 547	03 470	03 394	03 319	03 246	03 174	03 103	03 034	02 965	02 898
2,3	02 833	02 768	02 705	02 643	02 582	02 522	02 463	02 406	02 349	02 294
2,4	02 239	02 186	02 134	02 083	02 033	01 984	01 936	01 888	01 824	01 797
2,5	01 753	01 709	01 667	01 625	01 585	01 545	01 506	01 468	01 431	01 394
2,6	01 358	01 323	01 289	01 256	01 223	01 191	01 160	01 130	01 100	01 071
2,7	01 042	01 014	00 987	00 961	00 935	00 909	00 885	00 861	00 837	00 814
2,8	00 792	00 770	00 748	00 727	00 707	00 687	00 668	00 649	00 631	00 613
2,9	00 595	00 578	00 562	00 545	00 530	00 514	00 499	00 485	00 470	00 457
3,0	00 443	00 430	00 417	00 405	00 393	00 381	00 370	00 358	00 348	00 337
3,1	00 327	00 317	00 307	00 298	00 288	00 279	00 271	00 262	00 254	00 246
3,2	00 238	00 231	00 224	00 216	00 210	00 203	00 196	00 190	00 184	00 178
3,3	00 172	00 167	00 161	00 156	00 151	00 146	00 141	00 136	00 132	00 127
3,4	00 123	00 119	00 115	00 111	00 107	00 104	00 100	00 097	00 094	00 090
3,5	00 087	00 084	00 081	00 079	00 076	00 073	00 071	00 068	00 066	00 063
3,6	00 061	00 059	00 057	00 055	00 053	00 051	00 049	00 047	00 046	00 044
3,7	00 042	00 041	00 039	00 038	00 037	00 035	00 034	00 033	00 031	00 030
3,8	00 029	00 028	00 027	00 026	00 025	00 024	00 023	00 022	00 021	00 021
3,9	00 020	00 019	00 018	00 018	00 017	00 016	00 016	00 015	00 014	00 014
4,0	00 013	00 009	00 006	00 004	00 002	00 002	00 001	00 001	00 000	00 000

Таблица VII

Вторая функция нормированного отклонения

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot dx$$

(интегралы вероятностей)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	00 000	00 399	00 798	01 197	01 595	01 994	02 392	02 790	03 188	03 586
0,1	03 983	04 380	04 776	05 172	05 567	05 962	06 356	06 749	07 142	07 535
0,2	07 926	08 317	08 706	09 095	09 483	09 871	10 257	10 642	11 026	11 409
0,3	11 791	12 172	12 552	12 930	13 307	13 683	14 058	14 431	14 803	15 173
0,4	15 542	15 910	16 276	16 640	17 003	17 364	17 724	18 082	18 439	18 793
0,5	19 146	19 497	19 847	20 194	20 540	20 884	21 226	21 566	21 904	22 240
0,6	22 575	22 907	23 237	23 565	23 891	24 215	24 537	24 857	23 175	25 490
0,7	25 804	26 115	26 424	26 730	27 035	27 337	27 637	27 935	28 230	28 524
0,8	28 814	29 103	29 389	29 673	29 955	30 234	30 511	30 785	31 057	31 327
0,9	31 594	31 859	32 121	32 381	32 639	32 894	33 147	33 398	33 646	33 891
1,0	34 134	34 375	34 614	34 850	35 083	35 314	35 543	35 769	35 993	36 214
1,1	36 433	36 650	36 864	37 076	37 286	37493	37 698	37 900	38 100	38 298
1,2	38 493	38 686	38 877	39 065	39 251	39 435	39 617	39 796	39 973	41 047
1,3	40 320	40 490	40 658	40 824	40 988	41 149	41 308	41 466	41 621	41 774
1,4	41 924	42 073	42 220	42 364	42 507	42 647	42 786	42 922	43 056	43 189
1,5	43 319	43 448	43 574	43 699	43 822	43 943	44 062	44 179	44 295	44 408
1,6	44 520	44 630	44 738	44 845	44 950	45053	45 154	45 254	45 352	45 449
1,7	45 543	45 637	45 728	45 818	45 907	45994	46 080	46 164	46 246	46 327
1,8	46 407	46 485	46 562	46 638	46 712	46784	46 856	46 926	46 995	47 062
1,9	47 128	47 193	47 257	47 320	47 381	47 441	47 500	55 478	47 615	47 670
2,0	47 725	47 778	47 831	47 882	47 932	47 982	48 030	48 077	48 124	48 169
2,1	48 214	48 257	48 300	48 341	48 382	48 422	48 461	48 500	48 537	48 574
2,2	48 610	48 645	48 679	48 713	48 745	48 778	48 809	48 840	48 870	48 899
2,3	48 928	48 956	48 983	49 010	49 036	49 061	49 086	49 111	49 134	49 158
2,4	49 801	49 202	49 224	49 245	49266	49 286	49 305	49 324	49 343	49 361
2,5	49 379	49 396	49 413	49 430	49 446	49 461	49 477	49 492	49 506	49 520
2,6	49 534	49 547	49 560	49 573	49 585	49 598	49 609	49 621	49 632	49 643
2,7	49 653	49 664	49 674	49 683	49 693	49 702	49 711	49 720	49 728	49 736
2,8	49 744	49 752	49 760	49 767	49 774	49 781	49 788	49 795	49 801	49 807
2,9	49 813	49 819	49 825	49 831	49 836	49 841	49 846	49 851	49 856	49 861
3,0	49 865	49 869	49 874	49 878	49 882	49 886	49 889	49 893	49 896	49 900
3,1	49 903	49 906	49 910	49 913	49 916	49 918	49 921	49 924	49 926	49 929
3,2	49 931	49 934	49 936	49 938	49 940	49 942	49 944	49 946	49 948	49 950
3,3	49 952	49 953	49 955	49 957	49 958	49 960	49 961	49 962	49 964	49 965
3,4	49 966	49 968	49 969	49 970	49 971	49 972	49 973	49 974	49 975	49 976
3,5	49 977	49 978	49 978	49 979	49 980	49 981	49 981	49 982	49 983	49 983
3,6	49 984	49 985	49 985	49 986	49 986	49 987	49 987	49 988	49 988	49 989
3,7	49 989	49 990	49 990	49 990	49 991	49 991	49 992	49 992	49992	49 992
3,8	49 993	49 993	49 993	49 994	49 994	49 994	49 994	49 995	49 995	49 995
3,9	49 995	49 995	49 996	49 996	49 996	49 996	49 996	49 996	49 997	40 997
4,0	49 998	49 998	49 999	49 999	49 999	—	—	—	—	—

Таблица X

Стандартные значения критерия Стьюдента (t_{st})

ν	t_1	t_2	t_3	ν	t_1	t_2	t_3
1	12,7	63,7	637,0	13	2,2	3,0	4,2
2	4,3	9,9	31,6	14—15	2,1	3,0	4,1
3	3,2	5,8	12,9	16—17	2,1	2,9	4,0
4	2,8	4,6	8,6	18—20	2,1	2,9	3,9
5	2,6	4,0	6,9	21—24	2,1	2,8	3,8
6	2,4	3,7	6,0	25—28	2,1	2,8	3,7
7	2,4	3,5	5,3	29—30	2,0	2,8	3,7
8	2,3	3,4	5,0	31—34	2,0	2,7	3,7
9	2,3	3,3	4,8	35—42	2,0	2,7	3,6
10	2,2	3,2	4,6	43—62	2,0	2,7	3,5
11	2,2	3,1	4,4	63—175	2,0	2,6	3,4
12	2,2	3,1	4,3	176 и больше	2,0	2,6	3,3

Таблица XI

Стандартные значения критерия χ^2

ν	χ_1^2	χ_2^2	χ_3^2	ν	χ_1^2	χ_2^2	χ_3^2	ν	χ_1^2	χ_2^2	χ_3^2
1	3,8	6,6	10,8	18	28,9	34,8	42,3	40	55,8	63,7	73,4
2	6,0	9,2	13,8	19	30,1	36,2	43,8	42	58,1	66,2	76,1
3	7,8	11,3	16,3	20	31,4	37,6	45,3	44	60,5	68,7	78,7
4	9,5	13,3	18,5	21	32,7	38,9	46,8	46	62,8	71,2	81,4
5	11,1	15,1	20,5	22	33,9	40,3	48,3	48	65,2	73,7	84,0
6	12,6	16,8	22,5	23	35,2	41,6	49,7	50	67,5	76,2	86,7
7	14,1	18,5	24,3	24	36,4	43,0	51,2	55	73,3	82,3	93,2
8	15,5	20,1	26,1	25	37,7	44,3	52,6	60	79,1	88,4	99,6
9	16,9	21,7	27,9	26	38,9	45,6	54,1	65	84,8	94,4	106,0
10	18,3	23,2	29,6	27	40,1	47,0	55,5	70	90,5	100,4	112,3
11	19,7	24,7	31,3	28	41,3	48,3	56,9	75	96,2	106,4	118,5
12	21,0	26,2	32,9	29	42,6	49,6	58,3	80	101,9	112,3	124,8
13	22,4	27,7	34,5	30	43,8	50,9	59,7	85	107,5	118,2	131,0
14	23,7	29,1	36,1	32	46,2	53,5	62,4	90	113,1	124,1	137,1
15	25,0	30,6	37,7	34	48,6	56,0	65,2	95	118,7	130,0	143,3
16	26,3	32,0	39,3	36	51,0	58,6	67,9	100	124,3	135,8	149,4
17	27,6	33,4	40,8	38	53,4	61,1	70,7				